



NEDUR

Núcleo de Estudos em Desenvolvimento
Urbano e Regional
Universidade Federal do Paraná

Jogos sequenciais de informação incompleta

Prof^a. Kênia Barreiro de Souza

Professora do Departamento de Economia e do Programa de Pós-Graduação em Desenvolvimento Econômico da Universidade Federal do Paraná e Pesquisadora do Núcleo de Estudos em Desenvolvimento Urbano e Regional (NEDUR)

Material desenvolvido para a disciplina de Teoria dos Jogos (SE358) do Curso de Ciências Econômicas da Universidade Federal do Paraná (UFPR). O uso desse material fica autorizado em outros cursos desde que devidamente citados os créditos.

Janeiro/2021

Referências

FIANI, R. (2015) Teoria dos Jogos. 4ª edição. Editora Campus. (Capítulo 8)

BIERMAN, H. S. FERNANDEZ, L. (2011) Teoria dos Jogos. Editora Pearson. (Capítulo 15)

SPENCE, M. Job Market Signaling. *Quarterly Journal of Economics*, v. 87, n. 3, pp. 355-74, 1973.

Willian Spaniel, disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=d1Wsmj8iSWU>

Jogos sequenciais de informação incompleta

- Os tipos de jogos apresentados na disciplina levam a **quatro conceitos de equilíbrio**:

		Tipo de Jogo	
		Simultâneo	Sequencial
Tipo de Informação	Completa	Nash	Equilíbrio de Nash Perfeito em Subjogos
	Incompleta	Nash Bayesiano	Equilíbrio de Nash Bayesiano Perfeito em Subjogos

Fonte: Adaptado de Spaniel (Game Theory 101) <https://www.youtube.com/watch?v=mN5SP7ppQr4>

Jogos sequenciais de informação incompleta

- Como se trata de um jogo sequencial, sabemos que os equilíbrios de Nash do jogo precisam ser ***equilíbrios de Nash em todos os subjogos***.
- Como se trata de um jogo de informação incompleta, os jogadores terão alguma ***crença sobre os tipos de seus adversários***, de tal forma que, a solução do jogo envolve alguma incerteza, por isso o ***equilíbrio é bayesiano***.
- Formalmente, um equilíbrio de Nash Bayesiana perfeito em subjogos (ENBPS) pode ser definido como:

*“Uma combinação de estratégias dos jogadores, assim como as crenças em relação aos nós em todos os conjuntos de informação é chamada de **equilíbrio perfeito bayesiano** se: (a) as estratégias de cada jogador resultam em ações ótimas, dadas a crença do jogador e as estratégias dos demais jogadores; e (b) as crenças dos jogadores são consistentes com o teorema de Bayes sempre que possível”.*

(Fiani, p. 318, 2015)

Jogos sequenciais de informação incompleta

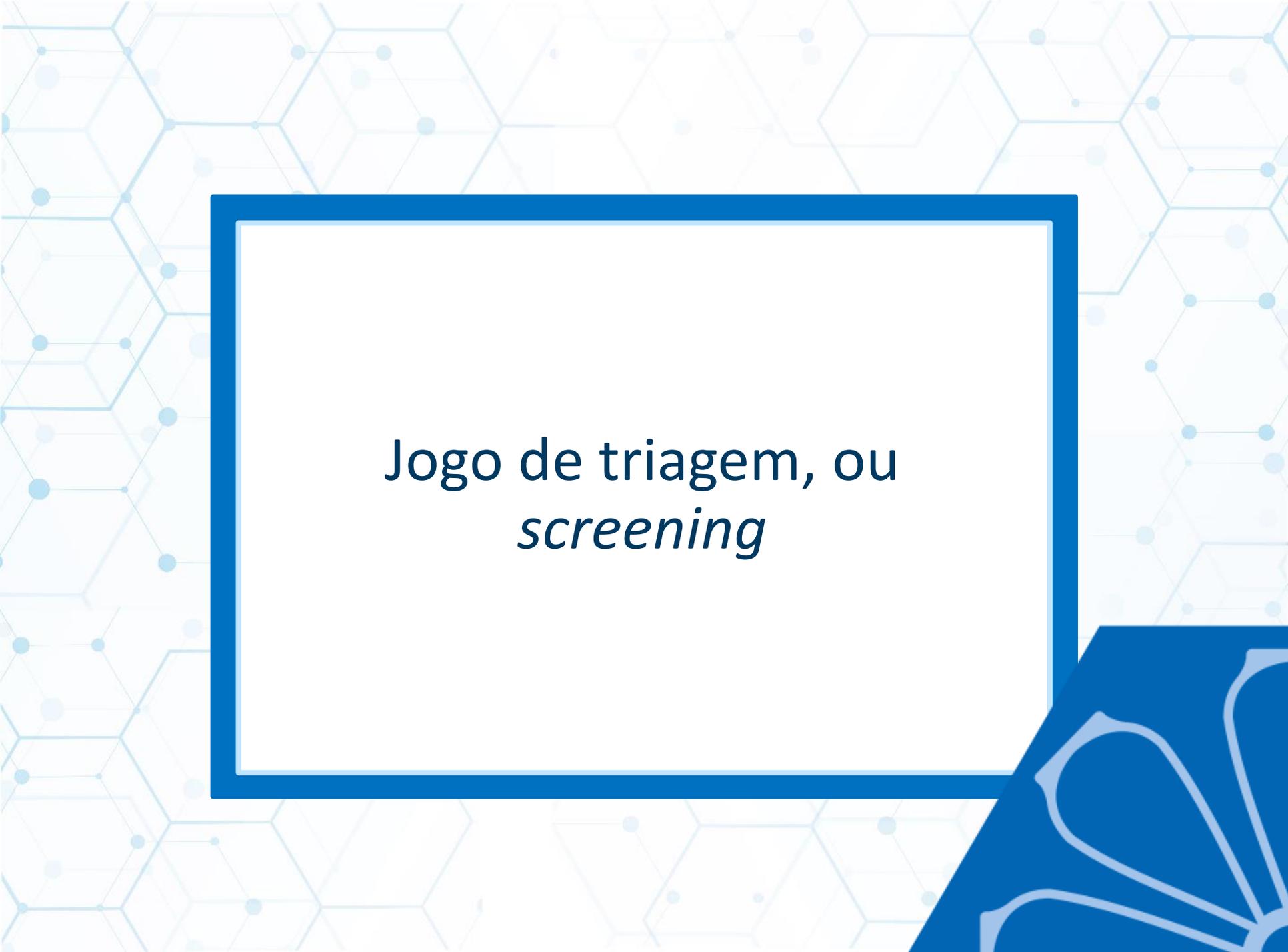
*“Uma combinação de estratégias dos jogadores, assim como as crenças em relação aos nós em todos os conjuntos de informação é chamada de **equilíbrio perfeito bayesiano** se: (a) as estratégias de cada jogador resultam em ações ótimas, dadas a crença do jogador e as estratégias dos demais jogadores; e (b) as crenças dos jogadores são consistentes com o teorema de Bayes sempre que possível”.*

(Fiani, p. 318, 2015)

- A condição (a) de um ENPS não é diferente de um equilíbrio de Nash Bayesiano (não perfeito), a grande novidade da definição é o teorema de Bayes.
- *Por ora, vamos omitir a definição formal e apenas dizer que o teorema de Bayes permite que os jogadores atualizem suas crenças a cada movimento do jogo.* A forma como poderemos utilizar a regra de Bayes depende da sequência de movimentos entre os jogadores e do tipo de informação que cada um possui.

Jogos sequenciais de informação incompleta

- Quanto estamos diante de um jogo de informação incompleta e sequencial podem ocorrer dois tipos de movimentos na dinâmica do jogo:
 - o jogador menos informado se move primeiro,
 - ou o jogador mais informado se move primeiro.
- No primeiro caso, dizemos que o **jogo é de triagem**, ou *screening*, pois o indivíduo com pouca informação tenta desenhar uma estratégia de forma a triar, ou selecionar, os tipos de jogadores com os quais gostaria de jogar.
- No segundo, caso, quando o jogador bem informado faz o primeiro movimento, trata-se de um **jogo de sinalização**, pois esse jogador tentará enviar um sinal para o adversário, revelando ou não o seu tipo.

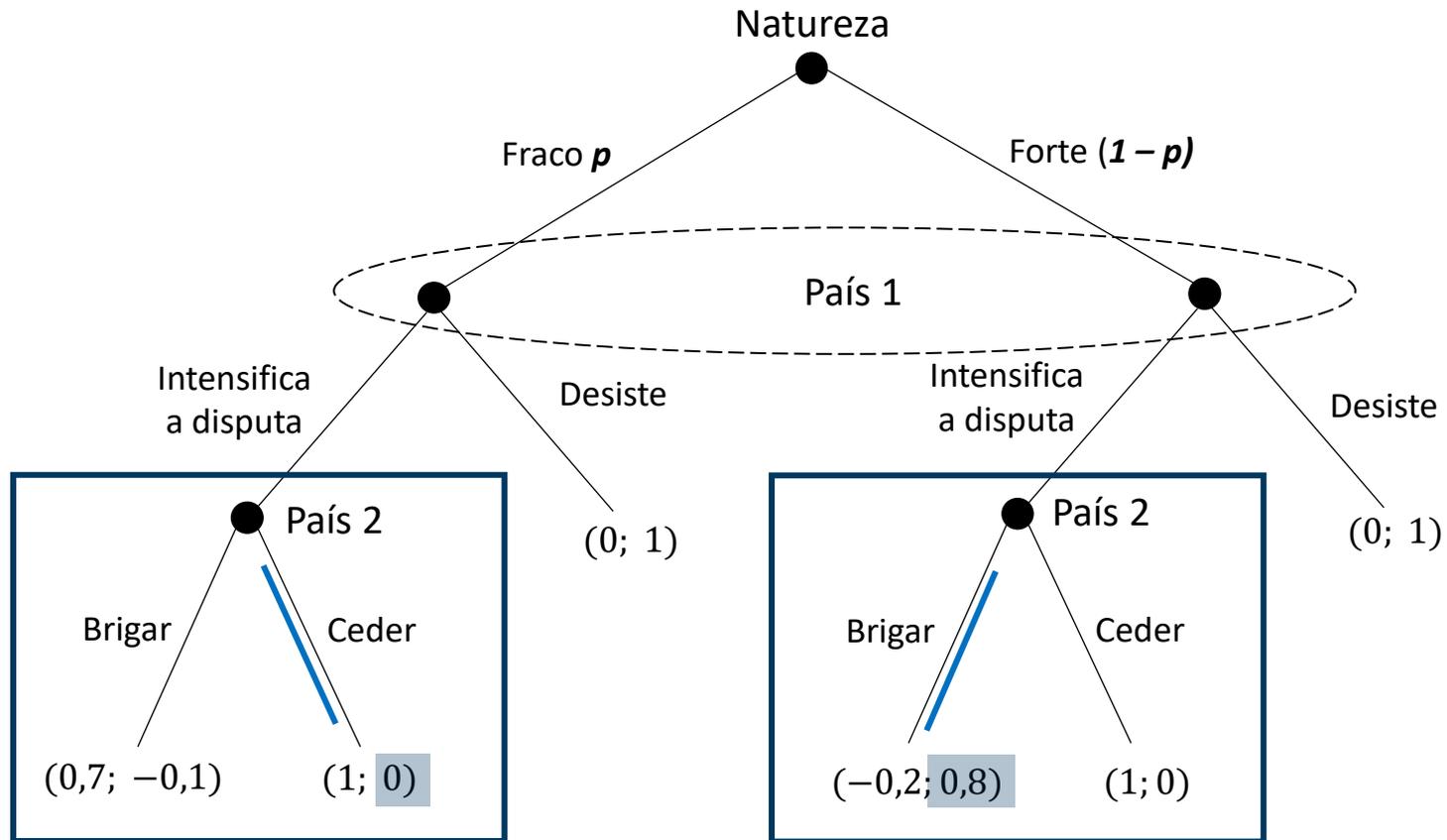


Jogo de triagem, ou
screening

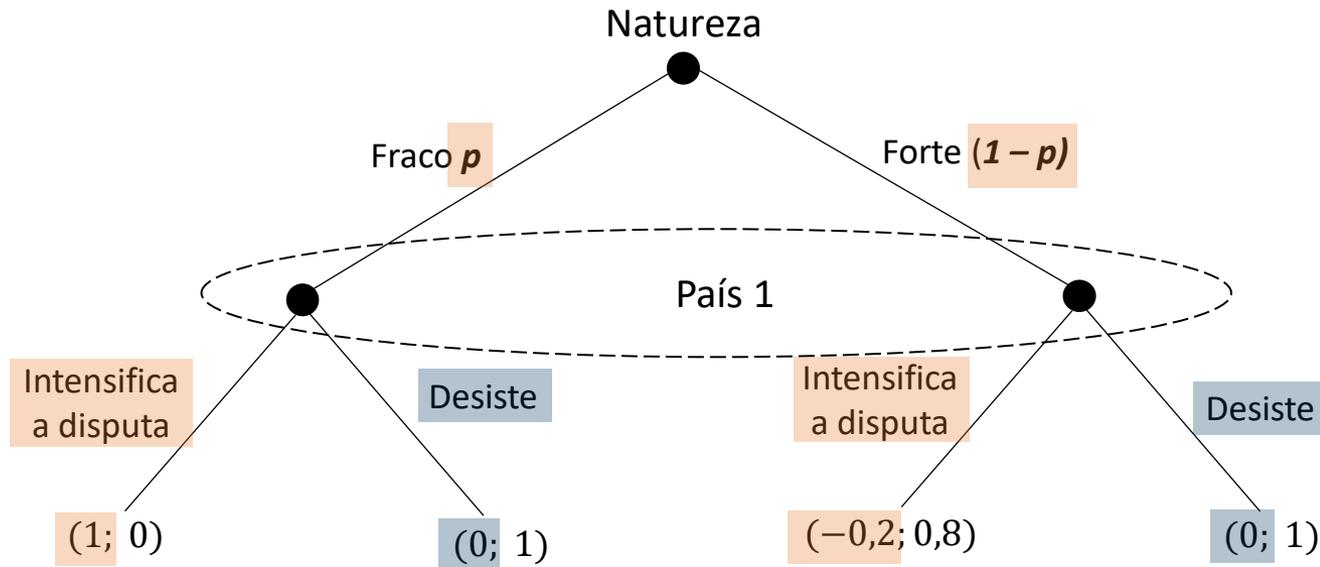
Jogos sequenciais de informação incompleta

- Vamos começar com os jogos de triagem ou screening, com um exemplo adaptado de Spaniel (2017, Game Theory 101).
- **Dois países se defrontam como uma disputa comercial.**
 - O país 1 deve decidir se intensifica a disputa ou desiste, porém não sabe qual será o comportamento do outro país.
 - O país 2 pode ser um país forte ou fraco na disputa comercial, que terá a opção de entrar na briga com o país 1 ou ceder.
 - O país 1 possui uma crença sobre o tipo do país 2 (Fraco ou Forte), com probabilidades p e $1 - p$, respectivamente.
 - Por sua vez, o país 2 não possui qualquer problema informacional, pois conhece o próprio tipo e conhece os *payoffs* do seu adversário.

Jogos sequenciais de informação incompleta



Jogos sequenciais de informação incompleta



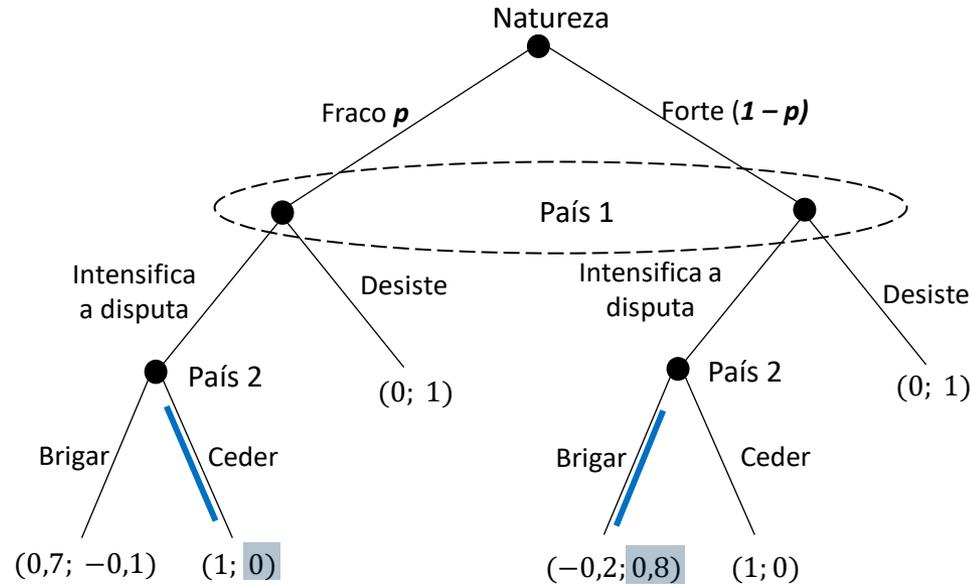
- Logo, o país 1 deverá intensificar a disputa se o payoff esperado de intensificar é maior do que o payoff de desistir, ou seja, se:

$$1p - 0,2(1 - p) > 0$$

$$1,2p - 0,2 > 0$$

$$p > 1/6$$

Jogos sequenciais de informação incompleta

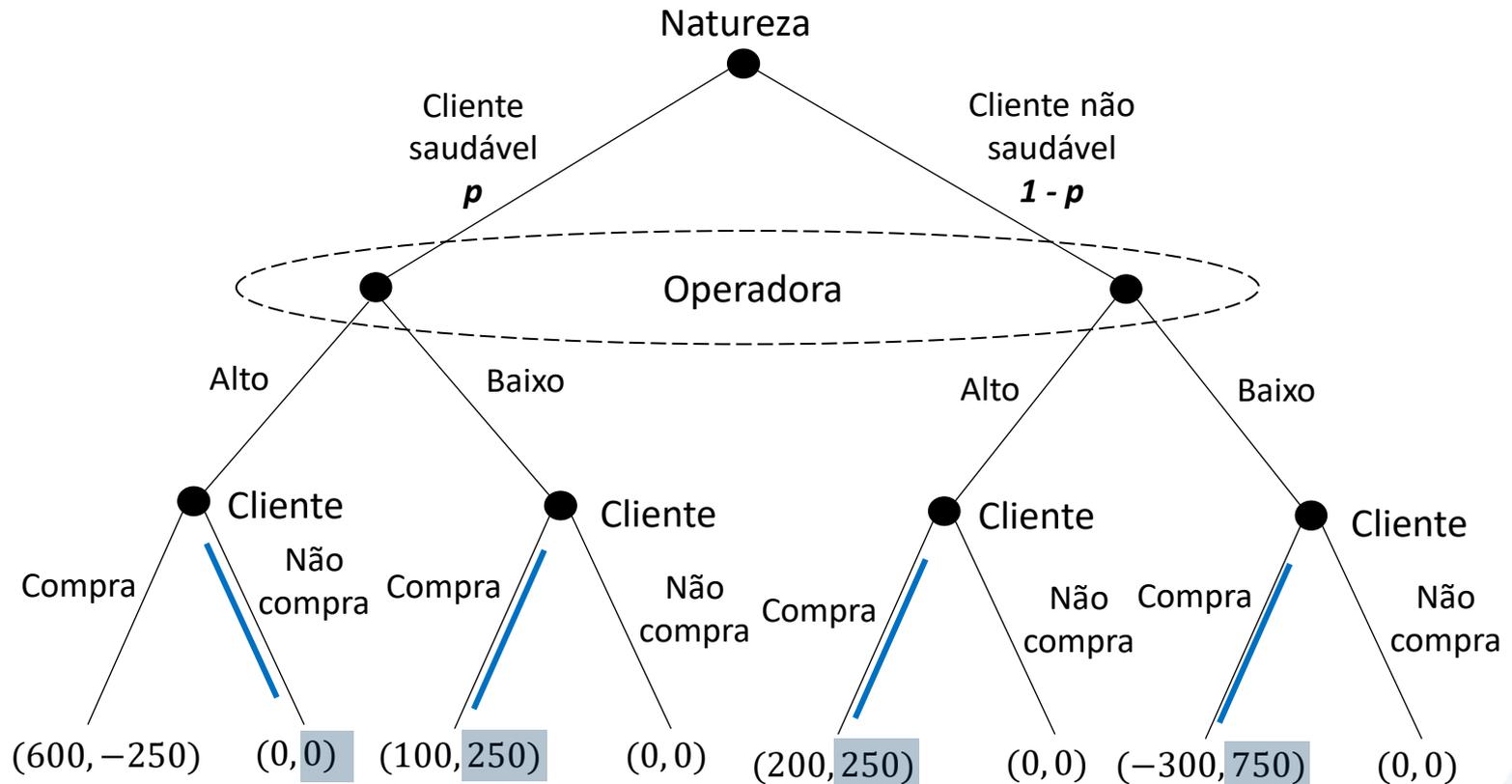


- Podemos representar o **equilíbrio de Nash Bayesiano perfeito em subjogos** seguinte forma:
 - se $p > 1/6$, sendo p a crença do país 1 de que o país 2 é do tipo fraco, o país 1 intensifica a disputa, o país 2 cede se for fraco e briga se for forte.
 - se $p < 1/6$, sendo p a crença do país 1 de que o país 2 é do tipo fraco, o país 1 desiste da disputa, o país 2 cede se for fraco e briga se for forte.

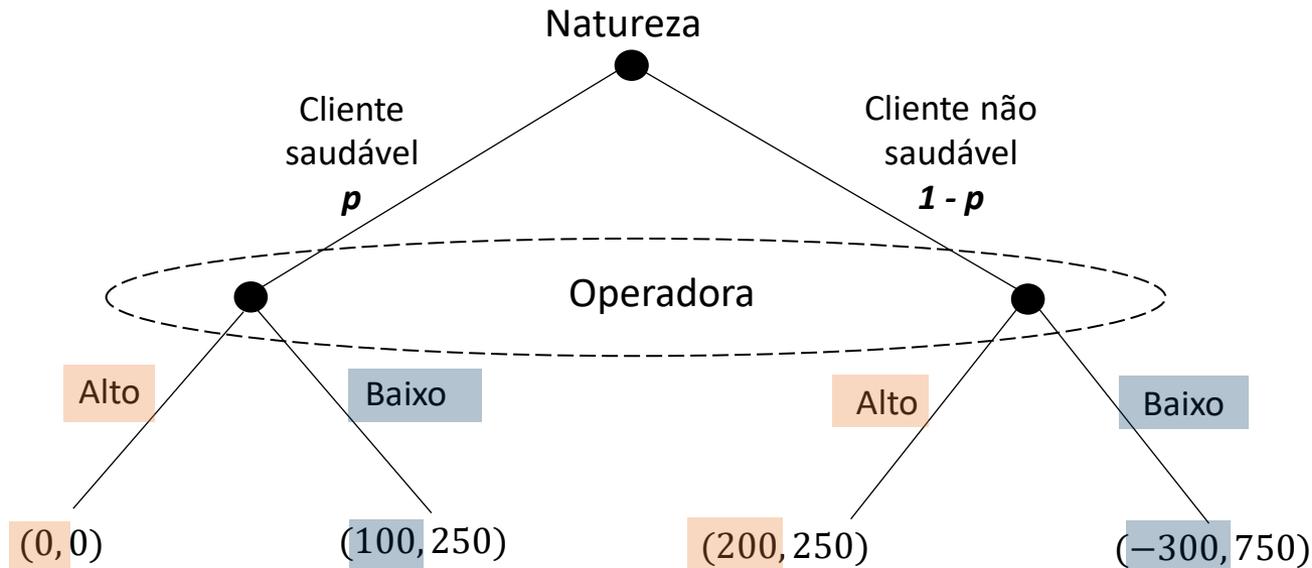
Jogos sequenciais de informação incompleta

- Um problema similar ocorre em problemas de seleção adversa, como no caso de seguros e planos de saúde
 - (Willian Spaniel, disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=d1Wsmj8iSWU>)
- A **operadora** pode oferecer planos a um **preço alto** (R\$ 1.000) ou **baixo** (R\$ 500), e o cliente poderá aceitar ou rejeitar a oferta.
- Os clientes podem ser de dois tipos: **saudáveis e não saudáveis**.
- A operadora possui uma crença quanto ao tipo do cliente, mas apenas o cliente sabe seu verdadeiro tipo.
- **Clientes saudáveis** custam em média R\$ 400 para a operadora, enquanto **clientes não saudáveis** custam em média R\$ 800.
- **Clientes saudáveis** estão dispostos a pagar até R\$ 750 por um plano de saúde, enquanto clientes **não saudáveis** estão dispostos a pagar no máximo R\$ 1.250.

Jogos sequenciais de informação incompleta



Jogos sequenciais de informação incompleta



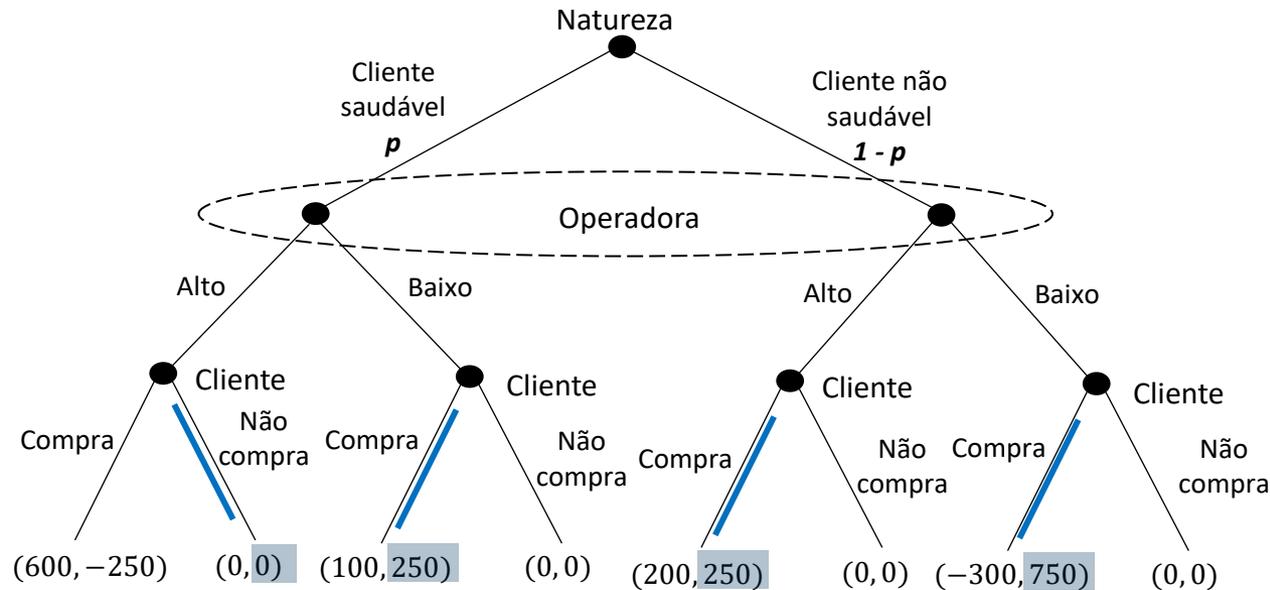
- A operadora escolhe preço alto se:

$$0p + 200(1 - p) > 100p - 300(1 - p)$$

$$200 - 200p > 100p - 300 + 300p$$

$$200 - 200p > 400p - 300 \Rightarrow p < \frac{5}{6}$$

Jogos sequenciais de informação incompleta



- Podemos representar o equilíbrio de Nash Bayesiano perfeito em subjogos da seguinte forma:
 - Se $p < 5/6$, sendo p a crença da operadora de que o cliente é saudável, então a operadora escolhe um preço alto, o cliente saudável não compra se a operadora joga alto, compra se joga baixo e o cliente não saudável compra o plano se a operadora joga alto ou baixo.
 - Se $p > 5/6$, sendo p a crença da operadora de que o cliente é saudável, então a operadora escolhe um preço baixo, o cliente saudável não compra se a operadora joga alto, compra se joga baixo e o cliente não saudável compra o plano se a operadora joga alto ou baixo.

Jogos sequenciais de informação incompleta

- A título de exemplificação, se tivermos $p = 0,6 < 5/6$, então:

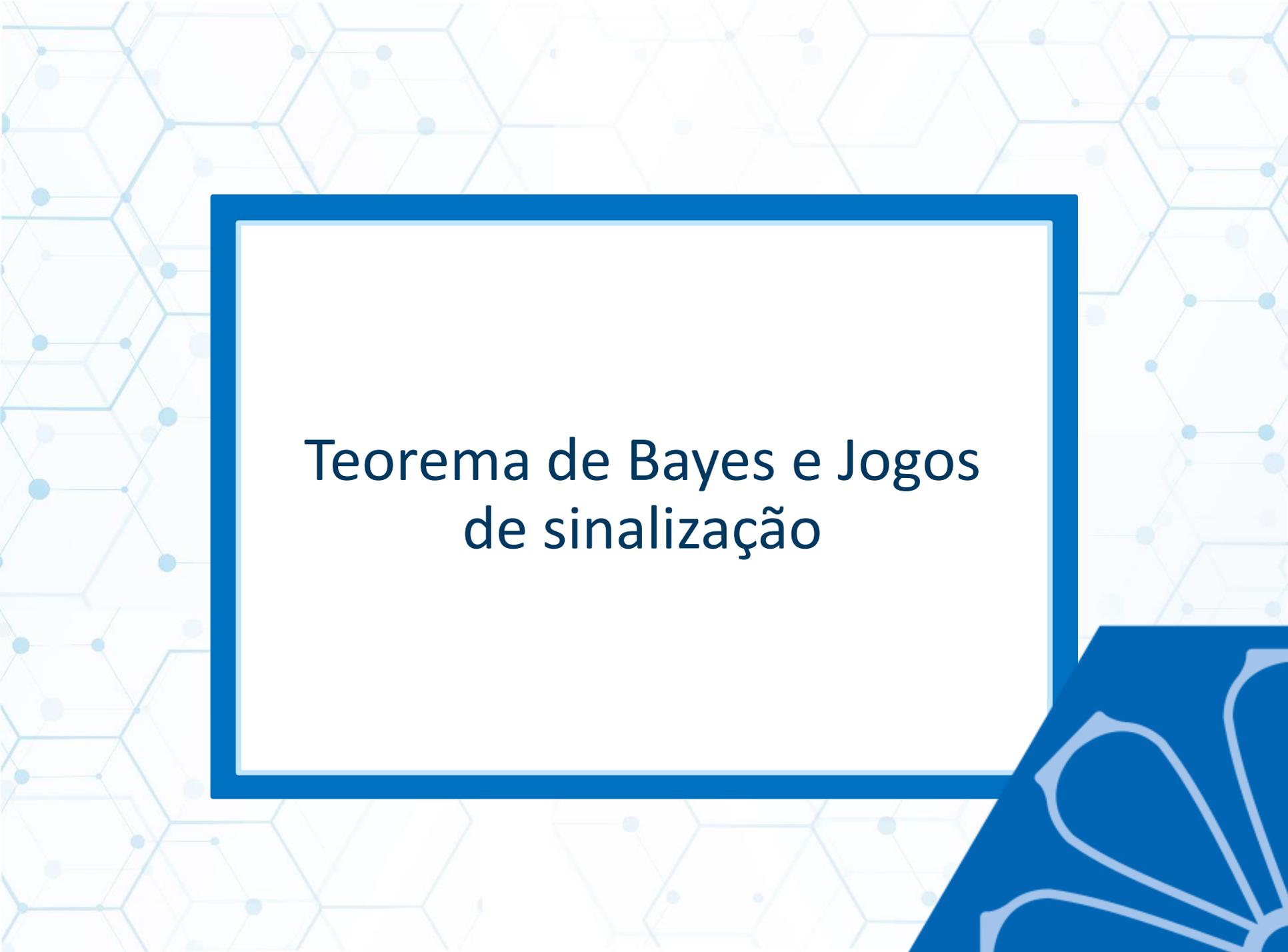
$$PE_A = 200 - 200p = 200 - 200 \times 0,6 = 80$$

$$PE_B = 400p - 300 = 400 \times 0,6 - 300 = -60$$

- Ou seja, o payoff esperado de um plano de saúde com preço alto é maior do que o payoff esperado de um plano de saúde com preço baixo, logo, a melhor escolha da operadora será determinar preço alto.
- Nesse caso, apenas pessoas não saudáveis irão adquirir o plano.

Jogos sequenciais de informação incompleta

- Até aqui fica claro que, ***quando o jogador menos informado se move primeiro***, o jogador com informação completa toma suas decisões como se o jogo possuísse informação completa. Porém o jogador com menos informação pode levar em consideração as ações do adversário para decidir como sua crença afeta suas estratégias.
 - ***Esses jogos são chamados de triagem, ou screening, porque o jogador menos informado busca selecionar os jogadores mais informados a partir de suas próprias crenças e das ações possíveis dos adversários.***
- Na sequência, vamos tratar do caso em que ***o jogador com mais informação se move primeiro***, e poderá enviar um sinal para o outro jogador. Conseqüentemente, a partir do sinal enviado, o segundo jogador (menos informado) poderá atualizar suas crenças.
 - Para tanto, será preciso compreender o teorema de Bayes.



Teorema de Bayes e Jogos de sinalização

Jogos sequenciais de informação incompleta

“Suponha que os eventos E_1, \dots, E_N sejam mutuamente exclusivos e exaustivos, além de terem probabilidade não nula. Suponha ainda que o evento F tenha uma probabilidade não nula. Assim, para cada evento i :

$$P(E_i|F) = \frac{P(F|E_i)P(E_i)}{P(F)} = \frac{P(F|E_i)P(E_i)}{\sum_{i=1}^N P(F|E_i)P(E_i)}$$

Em que $P(E_i|F)$ é a probabilidade de o evento E_i ocorrer, visto que o evento F ocorreu”

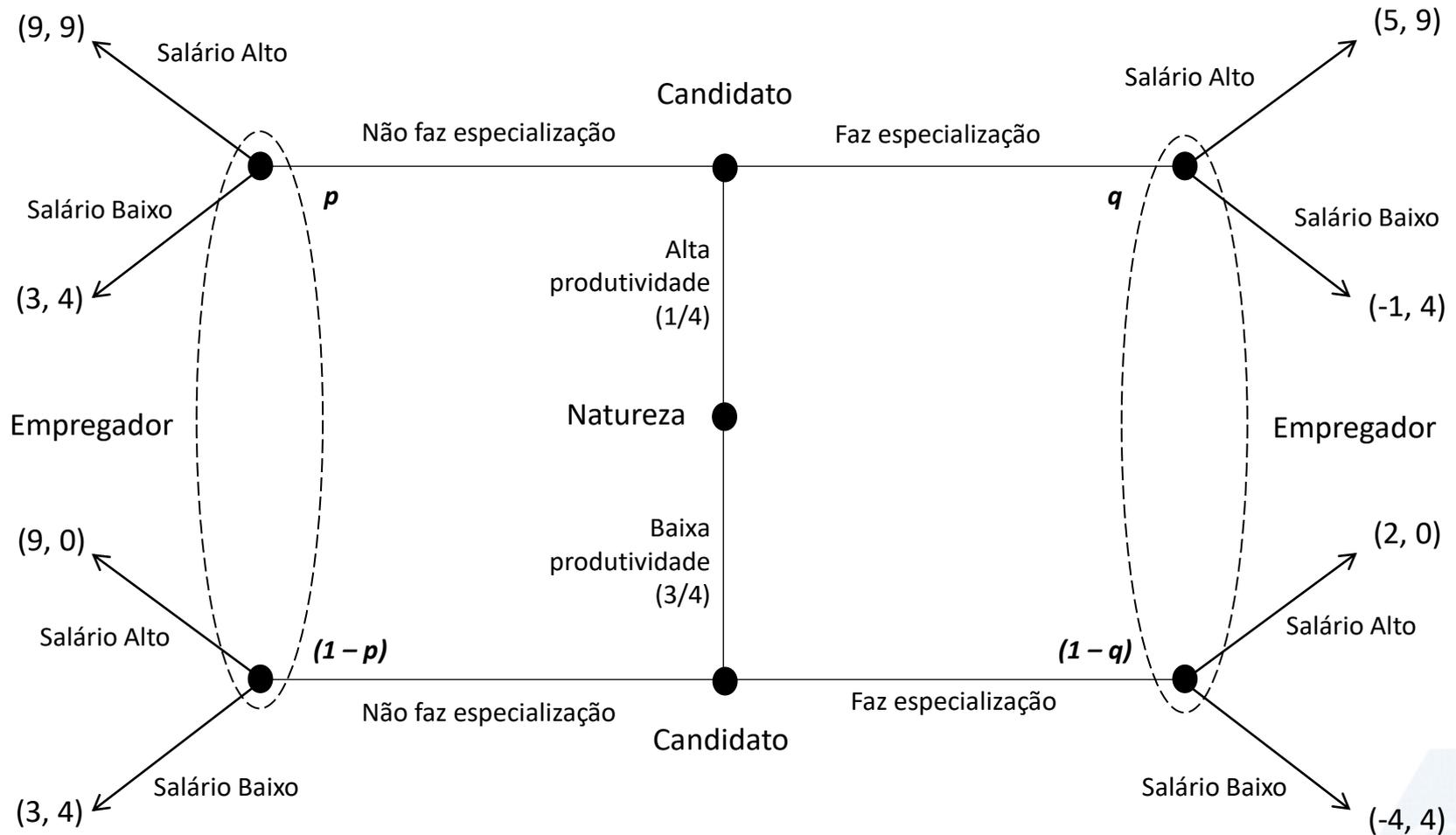
(Biernman e Fernandez, p. 295, 2011).

- Assim como anteriormente, o jogador poderá ter alguma crença inicial, ou $P(E_i)$, que representa a probabilidade anterior de que o evento E_i ocorra. Após o início do jogo, o jogador poderá observar uma nova informação, ou evento F e com isso, poderá calcular $P(E_i|F)$, que é chamada de probabilidade posterior (ou seja, posterior ao evento F ocorrer). Assim, a atualização Bayesiana durante um jogo consiste em recalcular a probabilidade anterior com base em uma nova informação.

Jogos sequenciais de informação incompleta

- Dessa forma, os jogadores poderão a partir do teorema de Bayes **atualizar suas crenças a respeito dos jogadores que podem assumir diferentes tipos**, ou seja, podem atualizar a probabilidade com que esperam determinada ação ou comportamento do adversário.
- O problema de sinalização mais famoso foi proposto por Spence (1973), no qual a educação é um sinal utilizado pelos indivíduos para indicar sua verdadeira produtividade no mercado de trabalho.
 - Na versão de jogos, conforme exemplo adaptado de Fiani (2015), existem dois jogadores, **o candidato e o empregador**. O candidato pode ser de **alta produtividade ou baixa produtividade**. Essa informação é de conhecimento do candidato, mas não é de conhecimento do empregador. O **candidato sabe seu próprio tipo e se move primeiro** decidindo se **faz um curso de especialização ou não**. Embora o curso de especialização envie um sinal para o empregador de que o trabalhador é mais qualificado e possivelmente mais produtivo, **emitir esse sinal possui um custo do trabalhador**, seja ele de baixa ou alta produtividade, **porém não melhora o desempenho do candidato**.

Jogos sequenciais de informação incompleta



Jogos sequenciais de informação incompleta

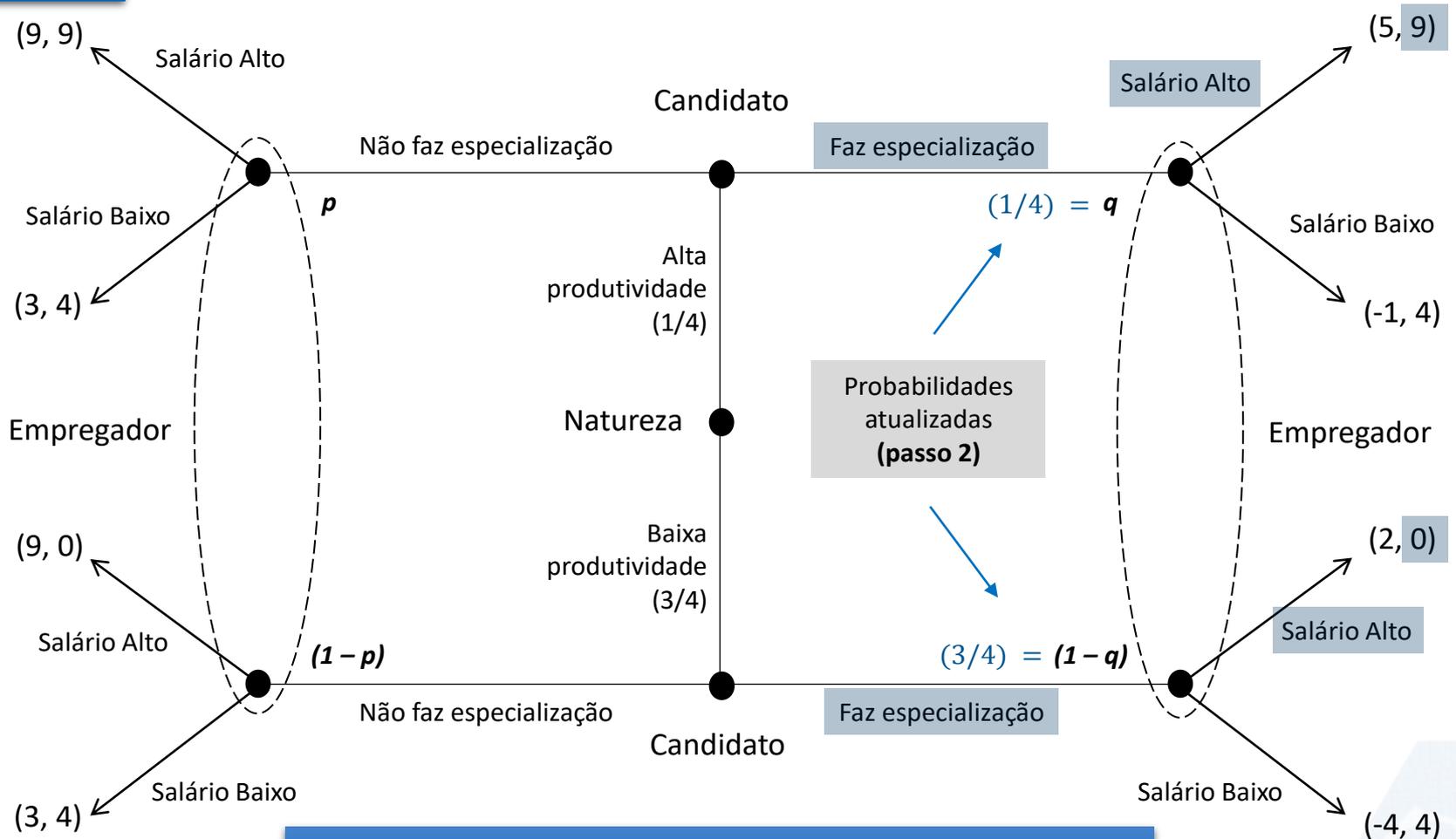
- Existem basicamente dois tipos de equilíbrio possíveis: o equilíbrio separador ou agregador.
- Um sinal forte é aquele que consegue distinguir entre os tipos, ou que gera um **equilíbrio separador**. Isso poderá ocorrer, por exemplo, se apenas os candidatos de alta produtividade conseguirem fazer um curso de especialização, enquanto candidatos de baixa produtividade não fazem o curso, nesse caso, o problema de informação desaparece. **O empregador saberá exatamente em qual dos nós de decisão se encontra** e terá como melhor resposta oferecer um salário baixo para o candidato de baixa produtividade e sem especialização, e alto para o candidato de alta produtividade. Ou seja, nesse caso as ações separam os tipos.
- Porém, esse não é o único equilíbrio possível. A solução do jogo pode ser um **equilíbrio agregador**, no qual ambos os tipos possuem como melhor resposta o mesmo conjunto de ações. Se isso ocorrer, o problema informacional persiste, e as estratégias deverão ser baseadas nas **crenças do empregador**, e **poderão ou não ser atualizadas utilizando a regra de Bayes**.

Jogos sequenciais de informação incompleta

- Em ambos os casos, o equilíbrio deve ser descrito como um conjunto de crenças e estratégias para cada jogador, porém para selecionar quais são os equilíbrios bayesianos perfeitos em subjogos, precisamos seguir as seguintes passos:
 1. Iniciar com uma estratégia da parte melhor informada, seja ela parte de um potencial ***equilíbrio agregador ou separador***;
 2. Se possível, ***calcular p ou q*** empregando o teorema de Bayes. Se não for possível será necessário testar valores antes do próximo passo.
 3. Dados q ou p , calcular a ***ação ótima da parte menos informada***.
 4. Conferir se a estratégia da parte melhor informada é a melhor resposta possível à ação da parte menos informada, ou se ***existe algum incentivo para desvio***. Se não for a melhor resposta sempre, esse não é um ENBPS. Se sim, seguir para o próximo passo.
 5. Se $p(q)$ foi calculado, calcule o ***valor de $q(p)$ que garante esse equilíbrio***.

Jogos sequenciais de informação incompleta

Possibilidade 1: *Equilíbrio agregador:* ambos fazem especialização (passo 1)

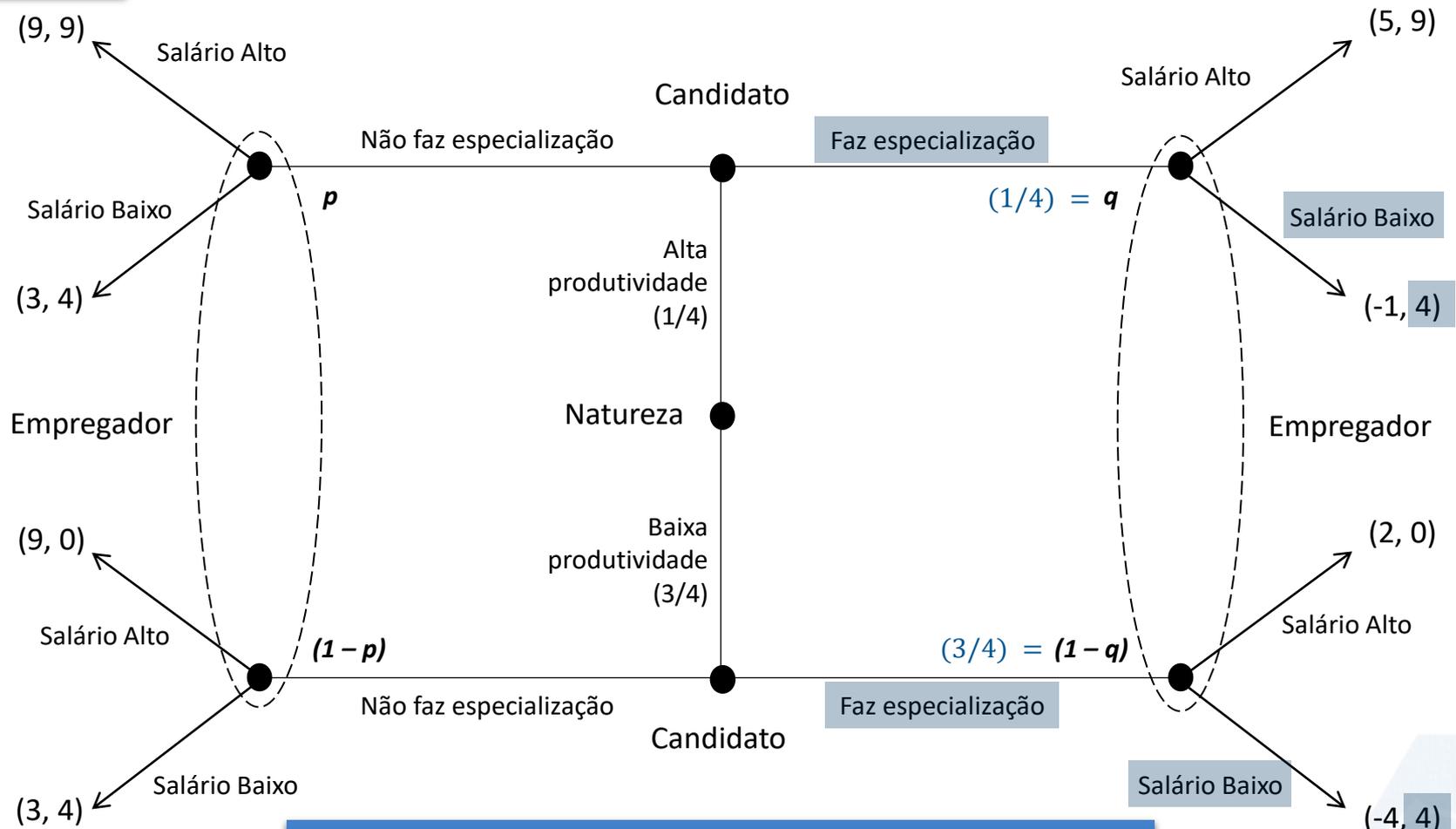


Logo, o payoff esperado pelo empregador quando ele escolhe salário alto será:

$$PE_A = 9 \times 0,25 + 0 \times 0,75 = 2,25$$

Jogos sequenciais de informação incompleta

Possibilidade 1:

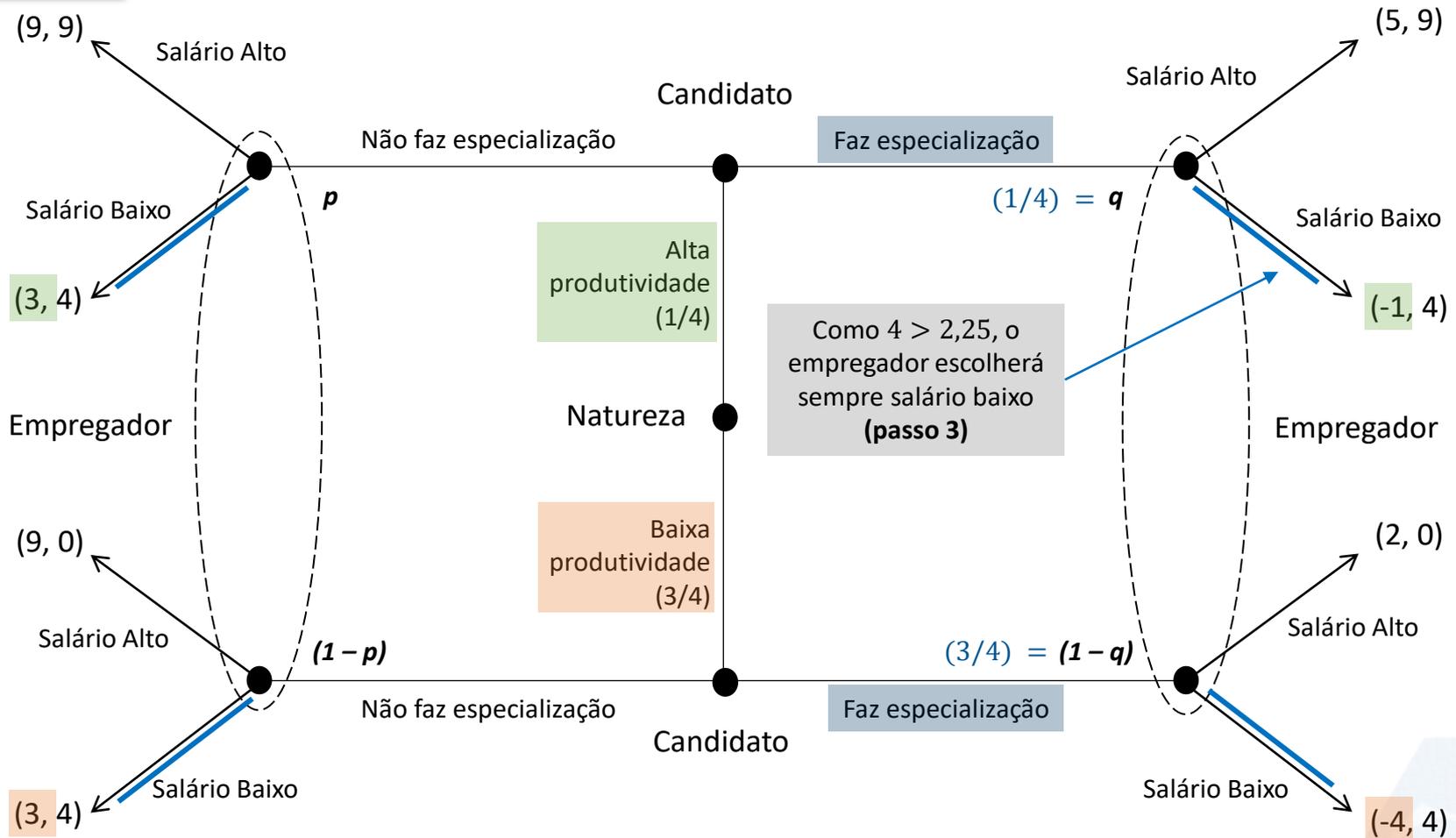


Logo, o payoff esperado pelo empregador quando ele escolhe salário baixo será:
 $PE_B = 4$

Jogos sequenciais de informação incompleta

Possibilidade 1:

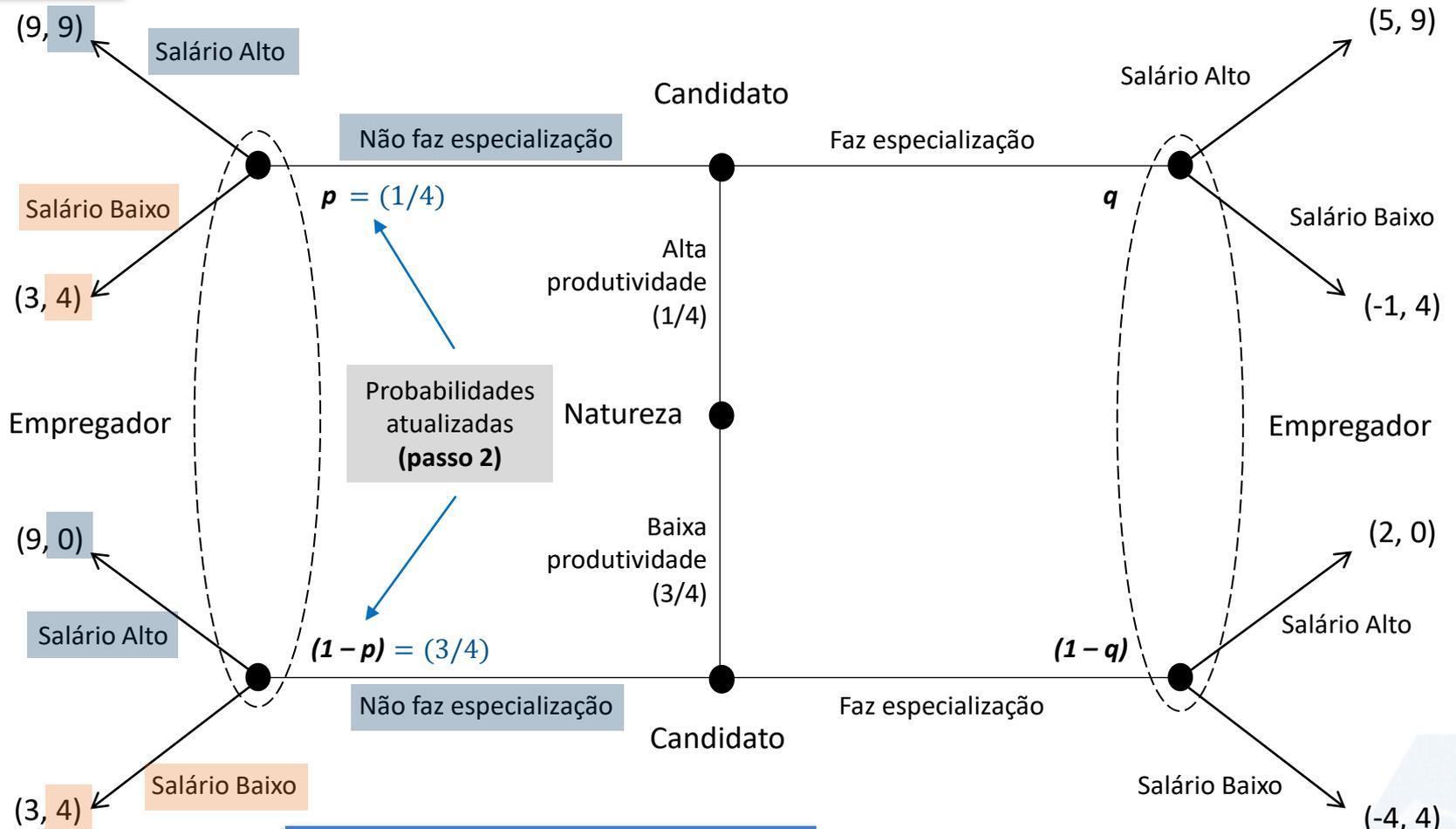
Alguns dos tipos possui incentivos para mudar de estratégia? (passo 4)



Dado que o salário será baixo e eles fazem especialização, ambos os indivíduos estariam em melhor situação se não fizessem especialização, **logo a estratégia em que ambos fazem especialização não pode ser um equilíbrio bayesiano perfeito em subjogos**

Jogos sequenciais de informação incompleta

Possibilidade 2: *Equilíbrio agregador:* nenhum faz especialização (passo 1)



$$PE_A = 9 \times 0,25 + 0 \times 0,75 = 2,25$$

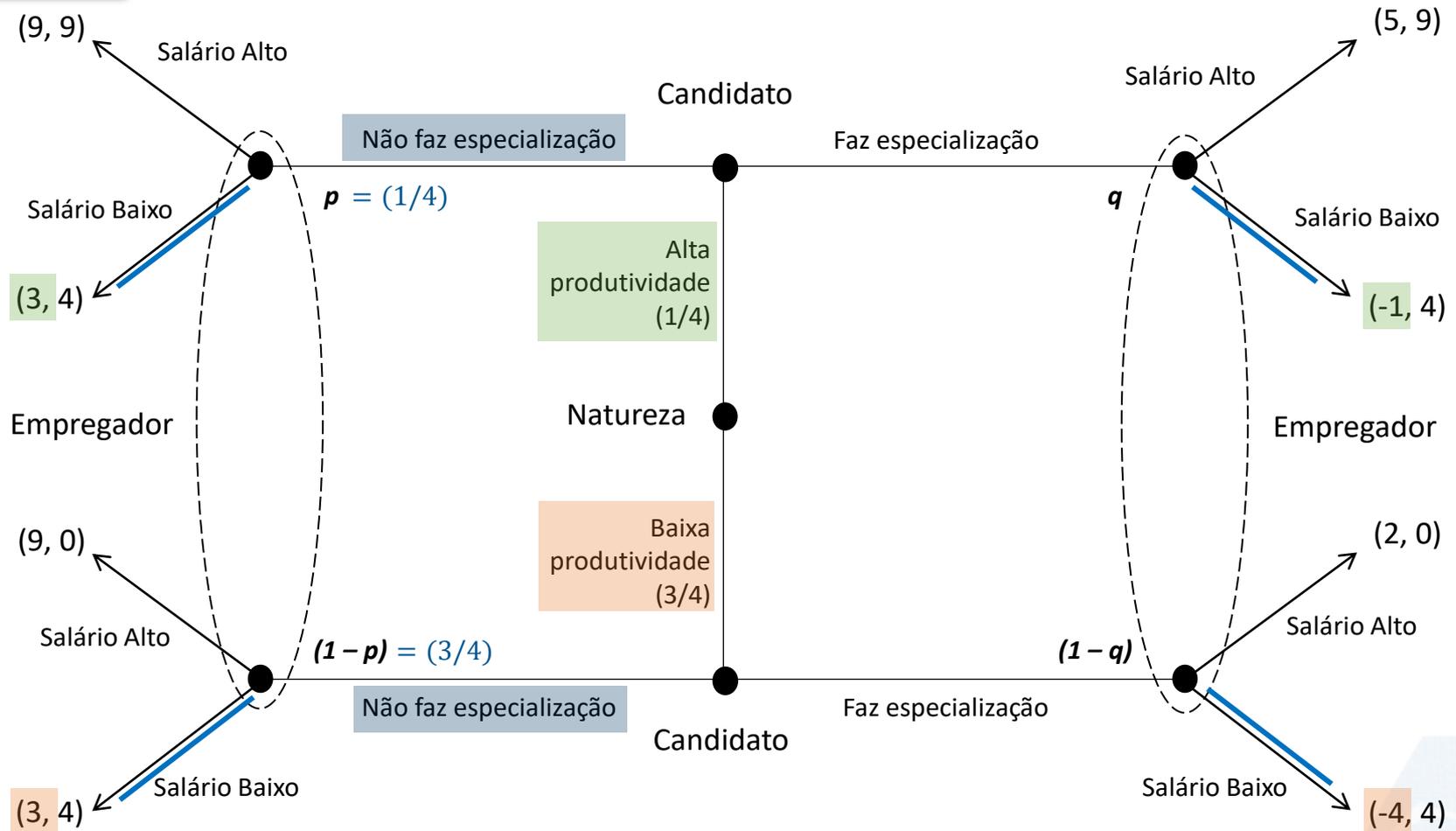
$$PE_B = 4$$

O empregador escolherá novamente salário baixo (passo 3)

Jogos sequenciais de informação incompleta

Possibilidade 2:

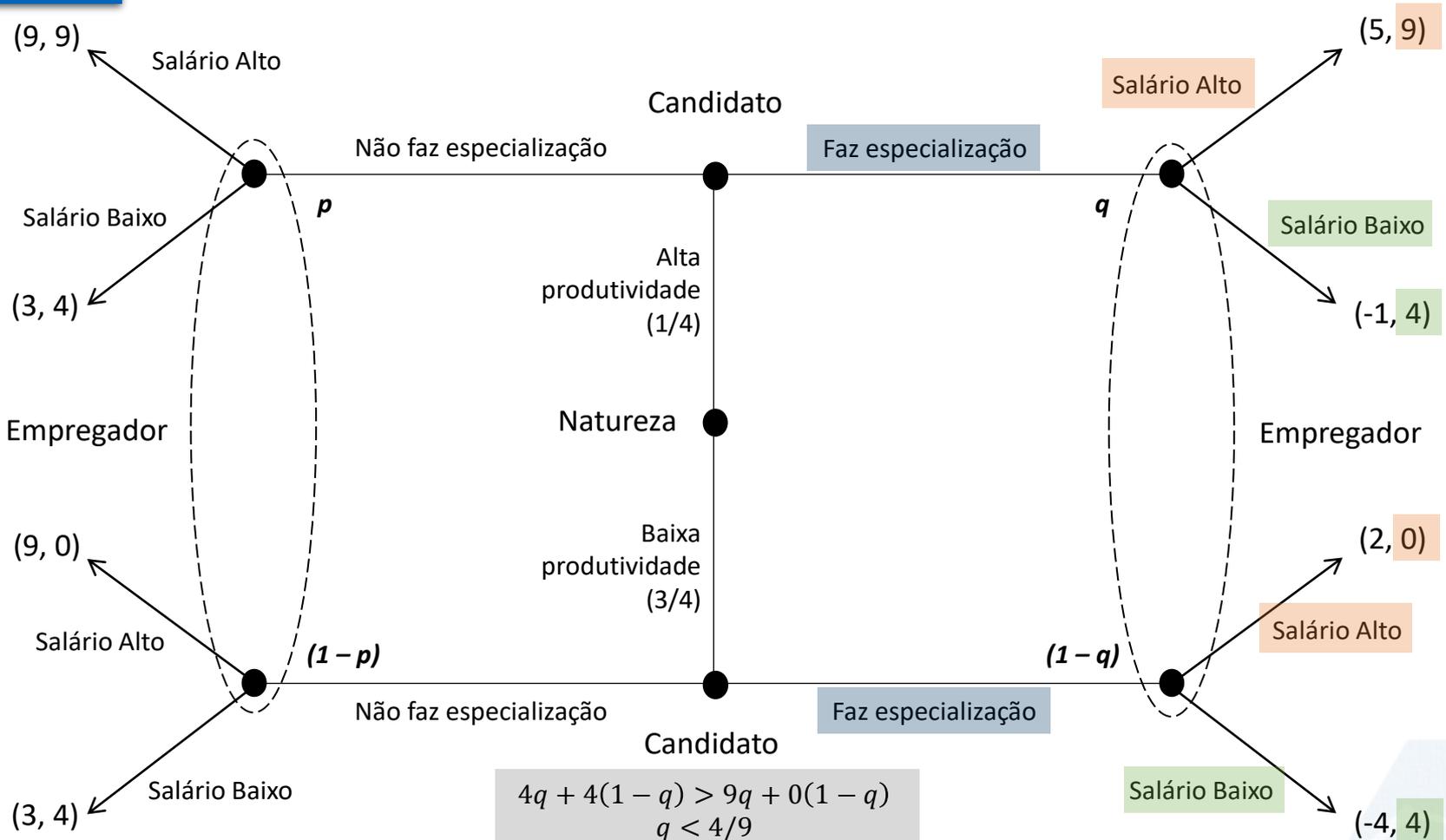
Algum dos tipos possui incentivos para mudar de estratégia? (passo 4)



Como nenhum dos tipos tem incentivos para mudar de estratégia, resta calcular o valor de q que garante que o empregador escolhe sempre salário baixo em qualquer circunstância do jogo, ou seja, mesmo se os candidatos escolherem fazer especialização (passo 5)

Jogos sequenciais de informação incompleta

Possibilidade 2:

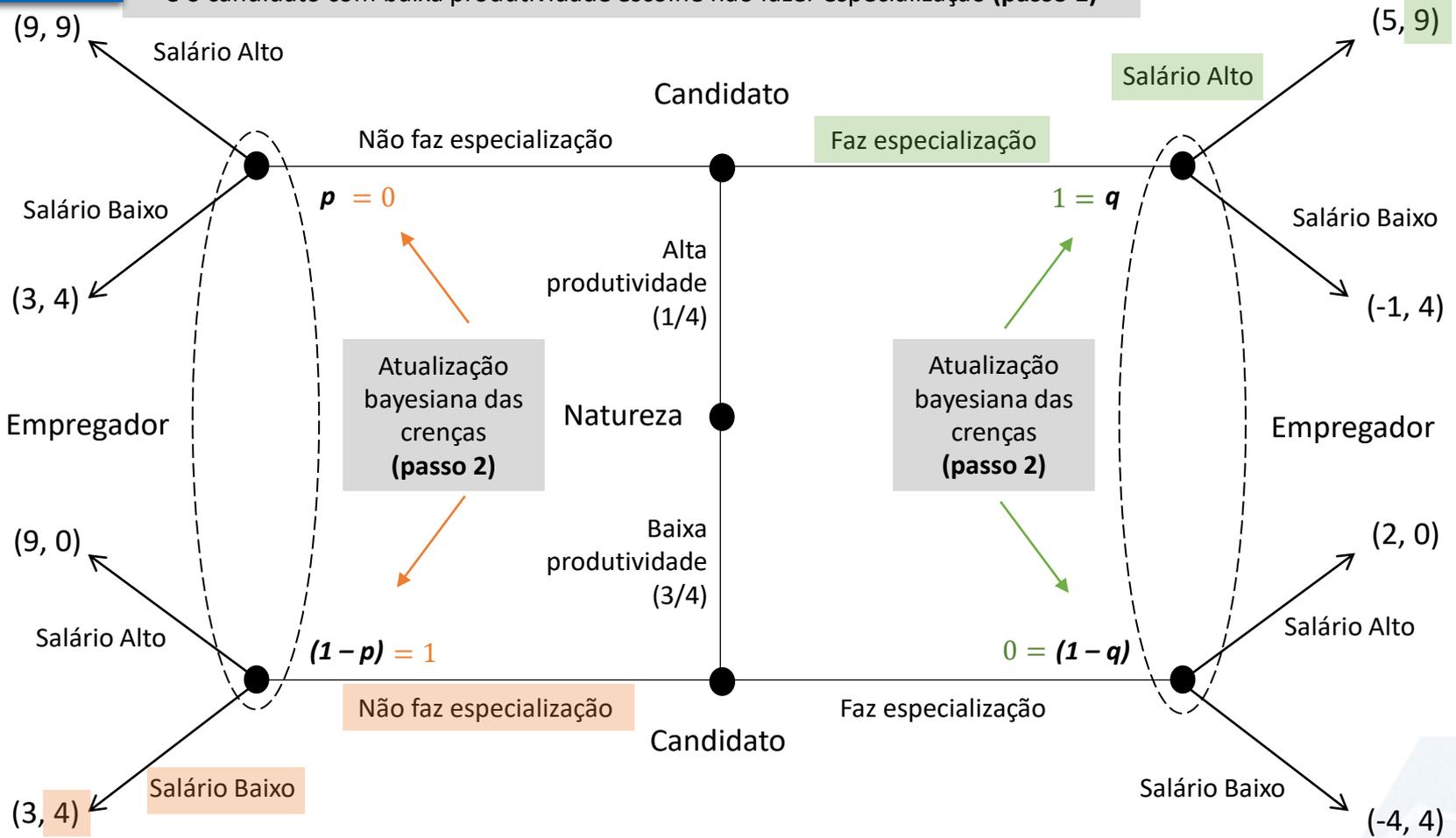


Assim, um ENBPS do jogo será: o candidato não faz especialização se é do tipo alta produtividade e não faz especialização se é do tipo baixa produtividade, o empregador escolhe salário baixo, com crença $p = 1/4$, quando o candidato não possui especialização e escolhe salário baixo, com crença $q < 4/9$ quando o candidato possui especialização.

Jogos sequenciais de informação incompleta

Possibilidade 3:

Equilíbrio separador: o candidato de alta produtividade escolhe fazer especialização e o candidato com baixa produtividade escolhe não fazer especialização (**passo 1**)



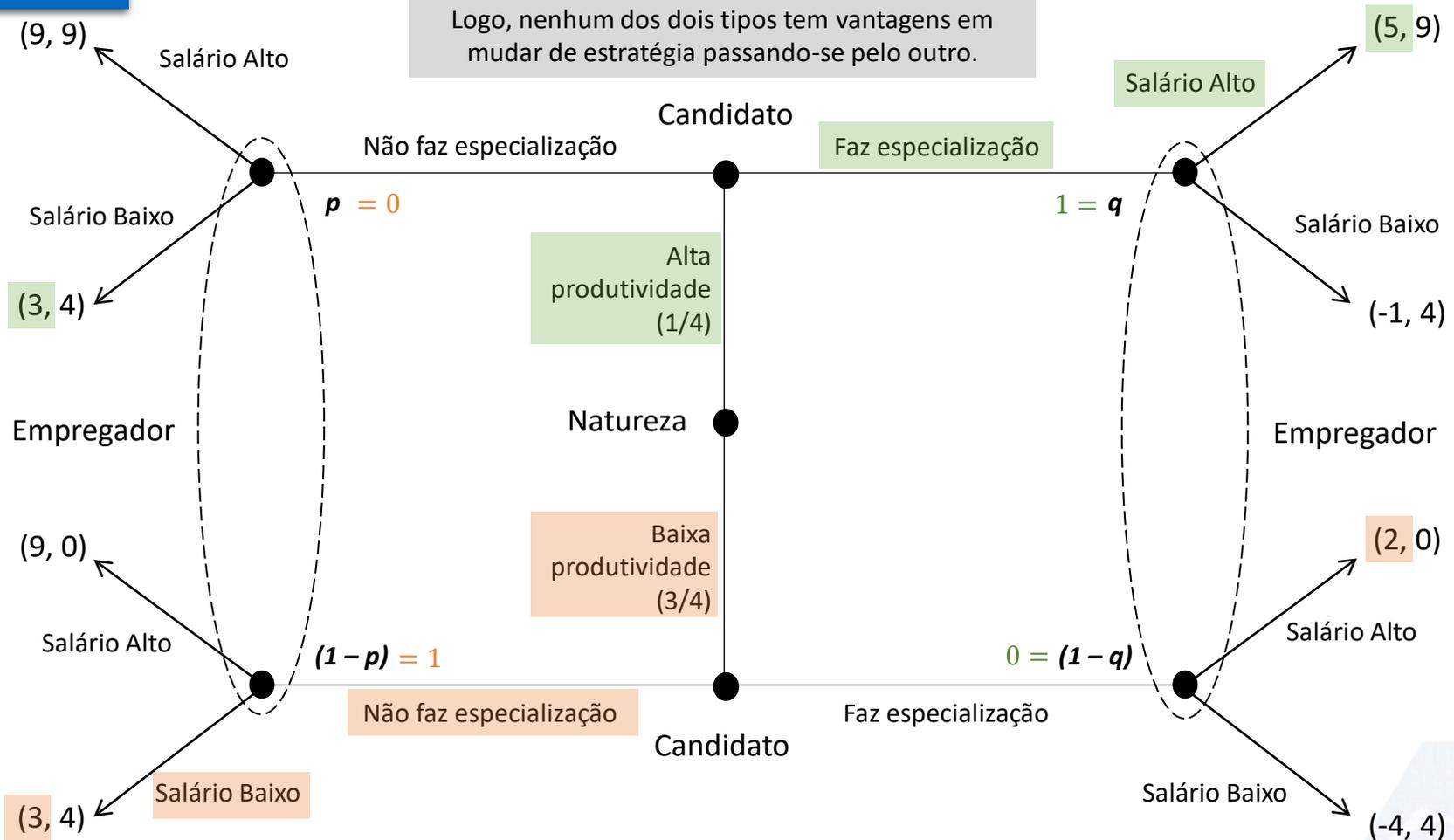
O empregador escolherá salário baixo para o indivíduo sem especialização e alto para o indivíduo com especialização (**passo 3**)

Jogos sequenciais de informação incompleta

Os candidatos possuem incentivos para desviar desse equilíbrio? (passo 4)

Possibilidade 3:

Logo, nenhum dos dois tipos tem vantagens em mudar de estratégia passando-se pelo outro.

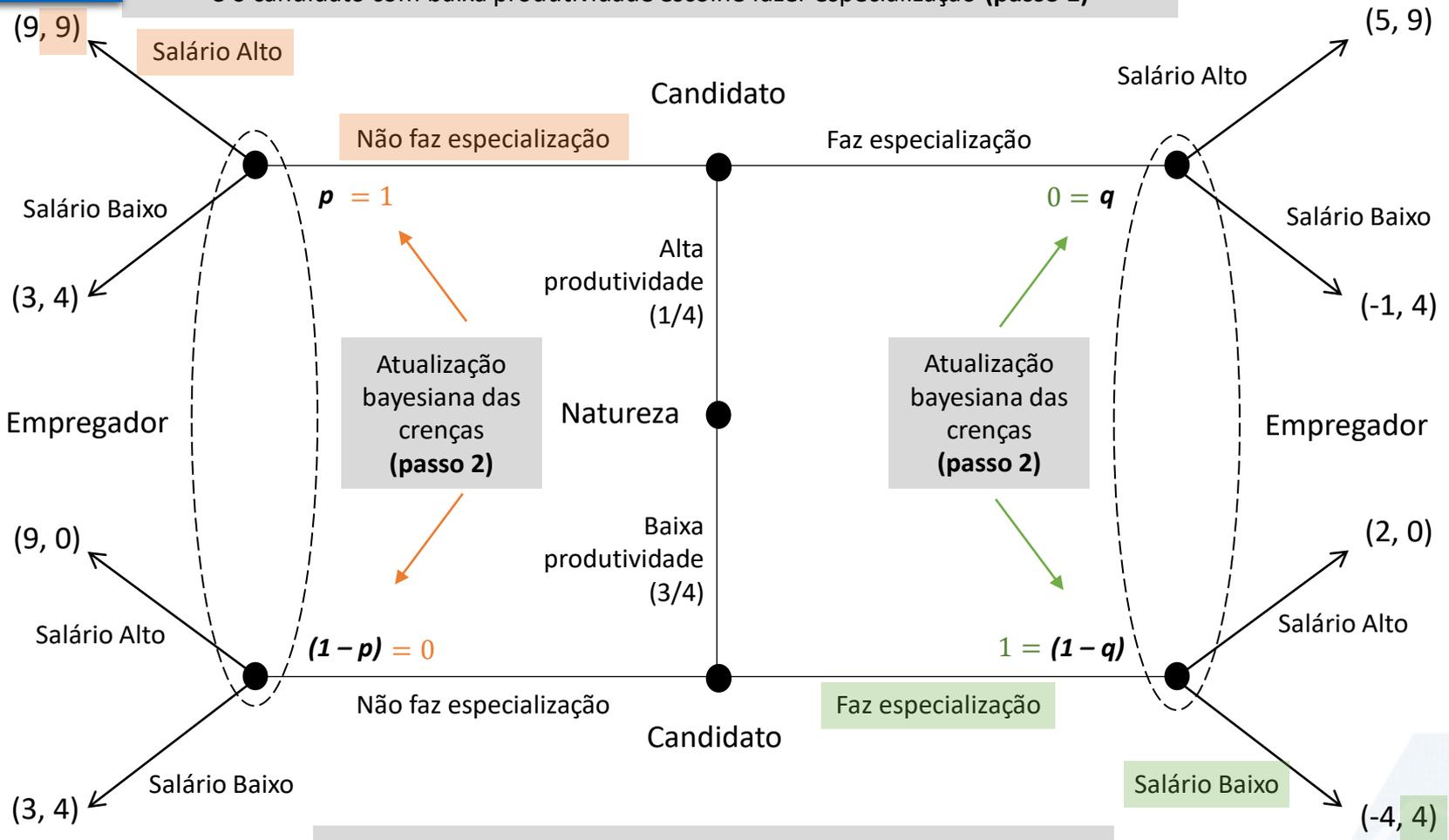


Temos mais um ENBPS constituído por: o candidato faz especialização se é do tipo alta produtividade e não faz especialização se é do tipo baixa produtividade, o empregador escolhe salário baixo, com crença $p = 0$, quando o candidato não possui especialização e escolhe salário alto, com crença $q = 1$ quando o candidato possui especialização.

Jogos sequenciais de informação incompleta

Possibilidade 4:

Equilíbrio separador: o candidato de alta produtividade escolhe não fazer especialização e o candidato com baixa produtividade escolhe fazer especialização (**passo 1**)

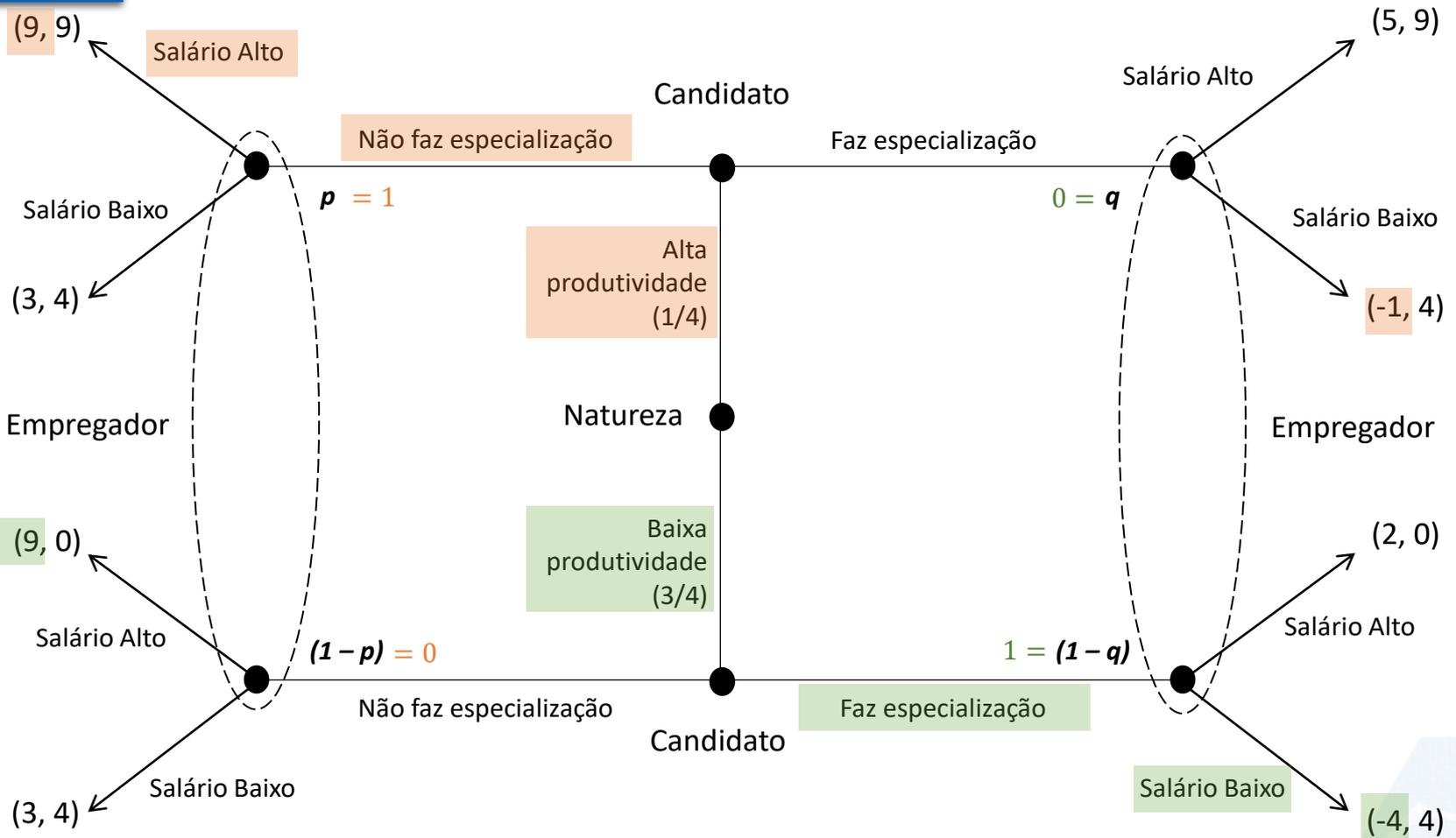


O empregador escolherá salário baixo para o indivíduo com especialização e alto para o indivíduo sem especialização (**passo 3**)

Jogos sequenciais de informação incompleta

Os candidatos possuem incentivos para desviar desse equilíbrio? (**passo 4**)

Possibilidade 4:

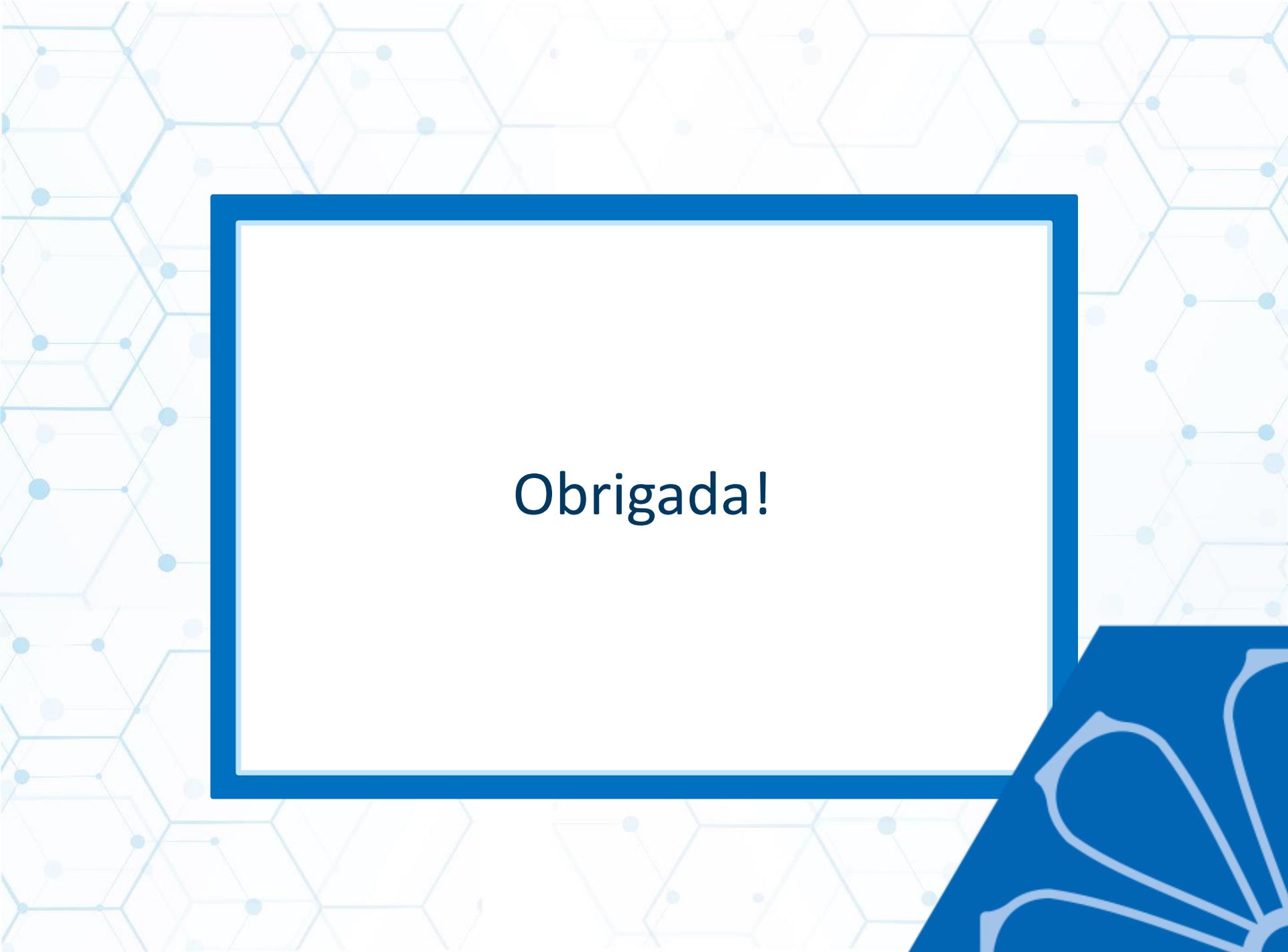


O candidato de baixa produtividade tem incentivos para não fazer especialização.

Logo, esse não pode ser um equilíbrio do jogo.

Jogos sequenciais de informação incompleta

- Há dois equilíbrios de Nash Bayesianos perfeitos para o jogo:
 - **Agregador:** o candidato não faz especialização se é do tipo alta produtividade e não faz especialização se é do tipo baixa produtividade, o empregador escolhe salário baixo, com crença $p = 1/4$, quando o candidato não possui especialização e escolhe salário baixo, com crença $q > 4/9$ quando o candidato possui especialização.
 - **Separador:** o candidato faz especialização se é do tipo alta produtividade e não faz especialização se é do tipo baixa produtividade, o empregador escolhe salário baixo, com crença $p = 0$, quando o candidato não possui especialização e escolhe salário alto, com crença $q = 1$ quando o candidato possui especialização.



Obrigada!



NEDUR

Núcleo de Estudos em Desenvolvimento
Urbano e Regional

Universidade Federal do Paraná



Av. Prefeito Lothário Meissner, nº 632 – Setor de Ciências Sociais | UFPR



www.nedur.ufpr.br



nedur.ufpr@gmail.com