NEDUR
Núcleo de Estudos em Desenvolvimento Urbano e Regional
Universidade Federal do Paraná

Jogos simultâneos de informação incompleta

Profª. Kênia Barreiro de Souza

Professora do Departamento de Economia e do Programa de Pós-Graduação em Desenvolvimento Econômico da Universidade Federal do Paraná e Pesquisadora do Núcleo de Estudos em Desenvolvimento Urbano e Regional (NEDUR)

Janeiro/2021

Referências

FIANI, R. (2015) Teoria dos Jogos. 4ª edição. Editora Campus. (Capítulo 7)

BIERMAN, H. S. FERNANDEZ, L. (2011) Teoria dos Jogos. Editora Pearson. (Capítulo 13)

HARSANYI, J.C. Games with incomplete information played by “Bayesian” players, I–III Part I. The basic model. *Management Science*, n. 14, v. 3, pp.159-182, 1967.

Jogos simultâneos de informação incompleta

- Nos jogos simultâneos de informação incompleta, as características de um ou mais jogadores **não são** de conhecimento comum de todos os jogadores.
- Nesse caso, ***os jogadores podem assumir "tipos" diferentes***, ou seja, comportamentos diferentes que fazem com que o adversário não saiba exatamente qual é a estrutura de payoffs do jogo em questão.
- Isso implica que ao tomar uma decisão***, um jogador pode não ter certeza de qual é o perfil do outro jogador, e precisará levar em consideração todas as circunstâncias (tipos) possíveis***.
    - Para tanto, ***o jogador que não possui a informação completa do jogo poderá formular crenças em relação aos seus oponentes***.

Jogos simultâneos de informação incompleta

- Vamos analisar o exemplo apresentado por Fiani (2015, capítulo 8), no qual uma ***empresa multinacional busca um fornecedor em outro país***.
- A empresa multinacional não conhece previamente o fornecedor, e sabe que ele pode ser do tipo ***socialmente responsável*** ou ***socialmente irresponsável***.
    - A multinacional pretende contratar um fornecedor socialmente responsável pois, caso contrário, poderá ter problemas de associação da sua marca com práticas consideradas socialmente ruins, como trabalho infantil, trabalho escravo, poluição, degradação ambiental, etc.

Jogos simultâneos de informação incompleta

NEDUR

- O Fornecedor pode ser de dois tipos, e cada tipo conduz a um jogo diferente:

Fornecedor responsável	**Multinacional** Contrata	Não Contrata
Age de forma socialmente responsável	2, 2	0, -1
Age de forma socialmente irresponsável	-1, -2	-1, 0

Independente do que a multinacional faz, o fornecedor responsável age de forma socialmente responsável.

Fornecedor irresponsável	**Multinacional** Contrata	Não Contrata
Age de forma socialmente responsável	-1, 2	0, -1
Age de forma socialmente irresponsável	2, -2	1, 0

Independente do que a multinacional faz, o fornecedor irresponsável age de forma socialmente irresponsável.

O problema da multinacional é não saber em qual dos dois jogos ela está!

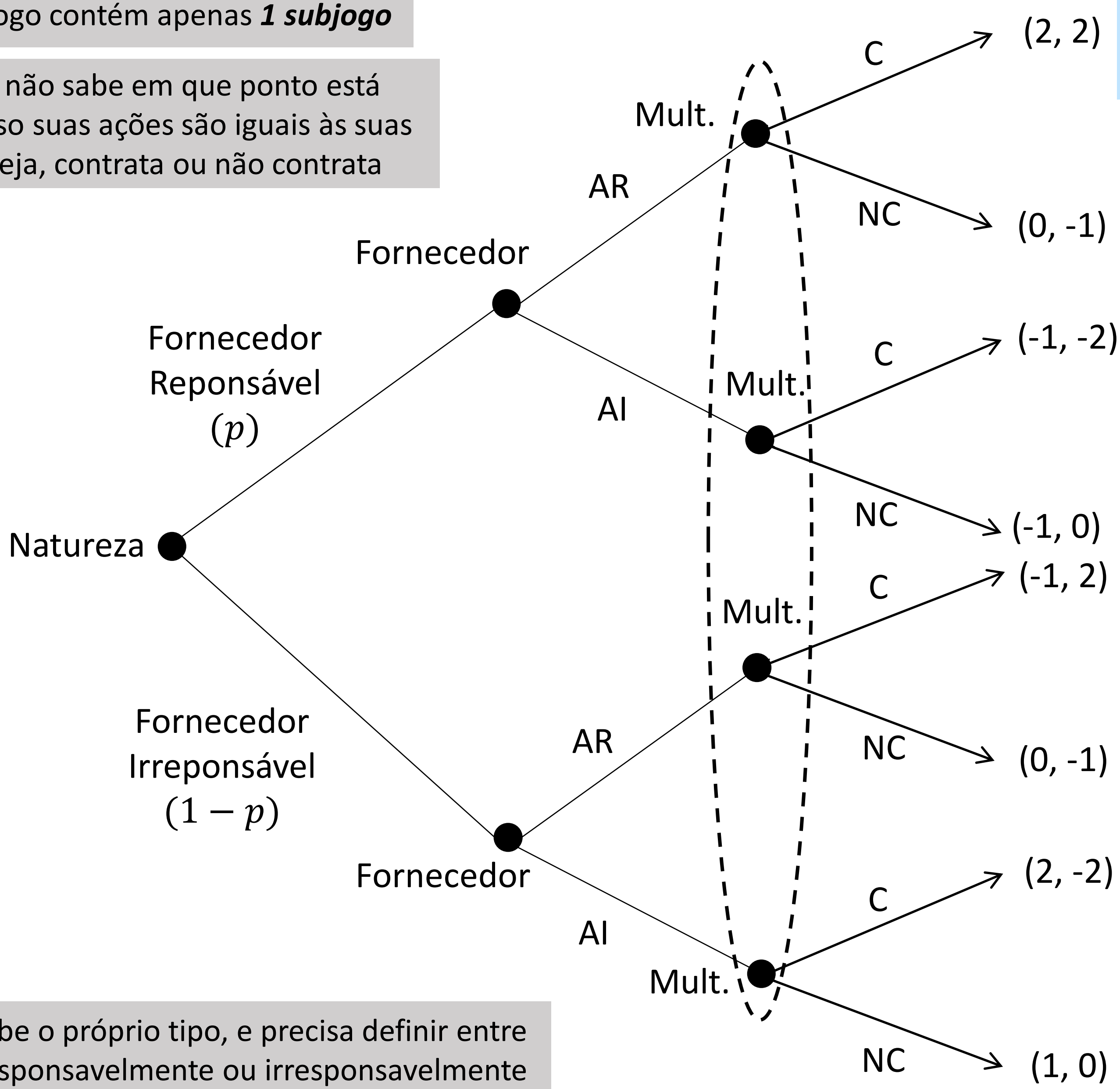
Jogos simultâneos de informação incompleta

- Harsanyi (1967) propôs uma solução para o problema: ***transformar o jogo de informação incompleta em um jogo de informação imperfeita***, no qual a natureza (pseudojogador) se move primeiro.
    - Assim, ***a natureza escolhe o tipo de jogador com determinada probabilidade***, e os jogadores compartilham uma crença prévia comum sobre como a natureza determina sua escolha aleatória entre os tipos.
- No exemplo da multinacional, o fornecedor sabe seu próprio tipo, mas a multinacional não consegue identificar o tipo do fornecedor antes do início do jogo.
- O fornecedor sabe o próprio tipo, e aguarda o movimento da multinacional.
- A multinacional terá uma crença sobre qual é a probabilidade de que o fornecedor seja de cada tipo, e ***essa probabilidade é de conhecimento comum no jogo***.

Legenda: AR – Age responsavelmente; AI – Age irresponsavelmente; C – Contrata; NC – Não Contrata

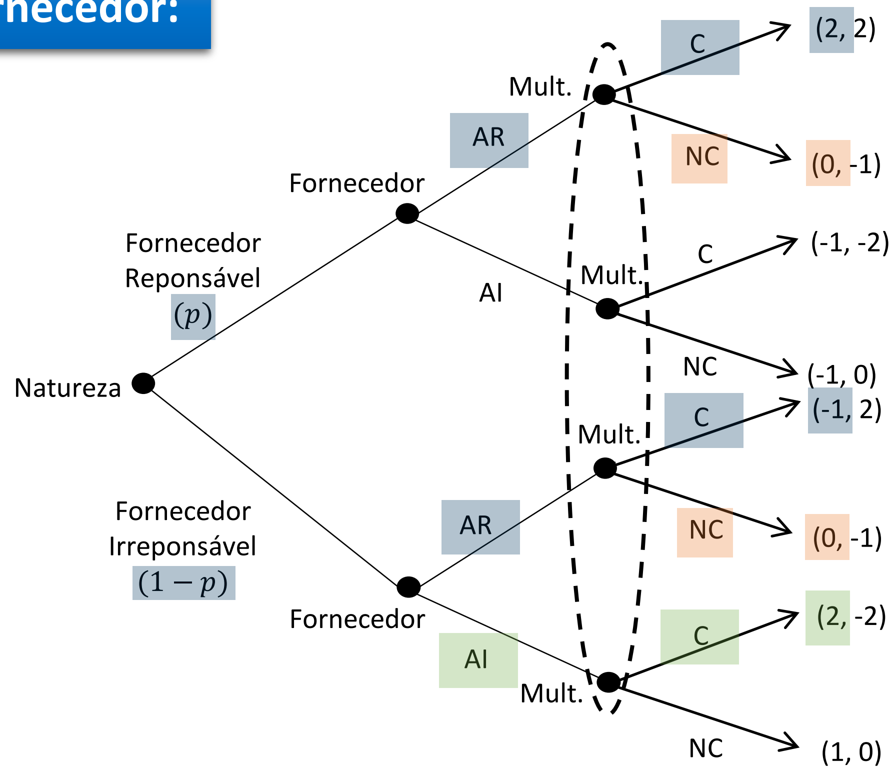
Observe que o jogo contém apenas ***1 subjogo***

A ***multinacional*** não sabe em que ponto está no jogo, e por isso suas ações são iguais às suas estratégias, ou seja, contrata ou não contrata



O ***fornecedor*** sabe o próprio tipo, e precisa definir entre agir de forma responsavelmente ou irresponsavelmente em cada um dos estados da natureza.

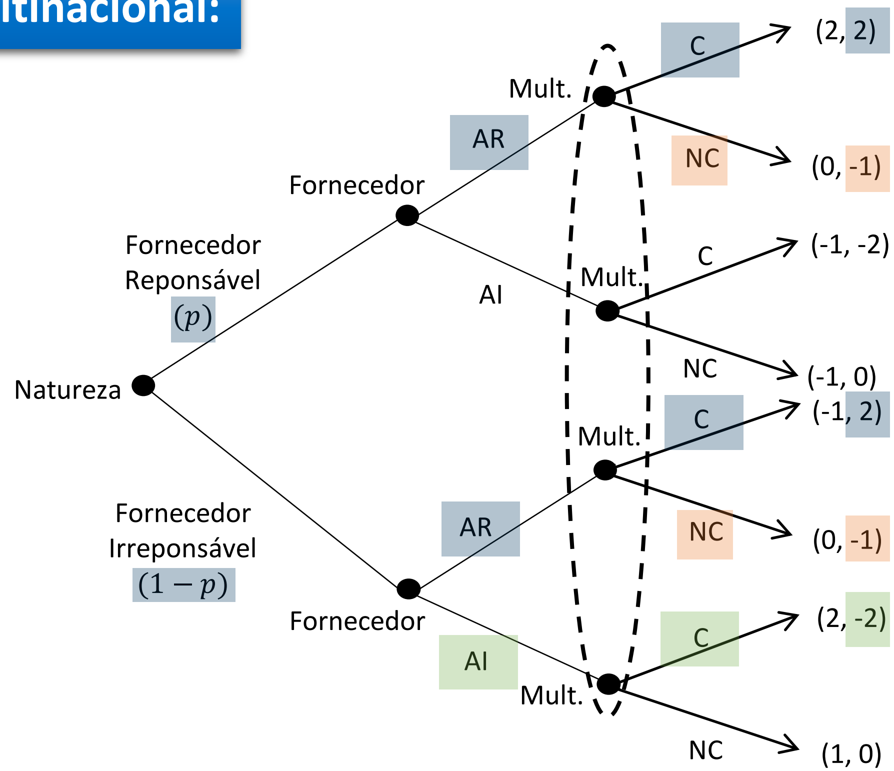
Recompensa do fornecedor:



Multinacional

Fornecedor	C - Contrata	NC – Não contrata
AR, AR	$2p - 1(1-p) = 3p - 1$	0
AR, AI	2	$0p + 1(1-p) = 1 - p$
AI, AR	-1	$-1p + 0(1-p) = -p$
AI, AI	$-1p + 2(1-p) = -3p + 2$	$-1p + 1(1-p) = -2p + 1$

Recompensa da multinacional:



Fornecedor	Multinacional: C - Contrata	Multinacional: NC – Não Contrata
AR, AR	2	-1
AR, AI	$2p-2(1-p)=4p-2$	$-1p+0(1-p)=-p$
AI, AR	$-2p+2(1-p)=-4p+2$	$0p-1(1-p)=p-1$
AI, AI	-2	0

Recompensa do fornecedor:

Fornecedor	**Multinacional** C	NC
AR, AR	$3p - 1$	0
AR, AI	2	$1 - p$
AI, AR	-1	$-p$
AI, AI	$-3p + 2$	$-2p + 1$

Recompensa da multinacional:

Fornecedor	**Multinacional** C	NC
AR, AR	2	-1
AR, AI	$4p - 2$	$-p$
AI, AR	$-4p + 2$	$p - 1$
AI, AI	-2	0

Forma estratégica Bayesiana do jogo Bayesiano simultâneo

Fornecedor	**Multinacional** C	NC
AR, AR	$(3p - 1), 2$	$0, -1$
AR, AI	$2, (4p - 2)$	$(1 - p), -p$
AI, AR	$-1, (-4p + 2)$	$-p, (p - 1)$
AI, AI	$(-3p + 2), -2$	$(-2p + 1), 0$

Jogos simultâneos de informação incompleta

- Finalmente, para solucionar o jogo, precisamos do conceito de ***equilíbrio de Nash Bayesiano***, que segundo Fiani (2015) é a combinação das estratégias adotadas pelos jogadores que maximiza as recompensas de cada jogador, dadas as estratégias dos demais jogadores, seus tipos e as probabilidades atribuídas aos tipos.

- Assim, supondo que a crença, de conhecimento comum entre a multinacional e o fornecedor seja de que $p = {}^{1}/_{2}$, então a forma estratégica do jogo simultâneo será dada por:

	Multinacional	
Fornecedor	C	NC
AR, AR	$1/2\,,\,2$	$0, -1$
AR, AI	$2, 0$	$1/2, -1/2$
AI, AR	$-1, 0$	$-1/2, -1/2$
AI, AI	$1/2, -2$	$0,0$

Nesse caso, dizemos que {(AR, AI), C} é o **equilíbrio de Nash Bayesiano** do jogo para $\mathrm{p} = {}^{1}/_{2}$.

Modelo de Cournot com informação incompleta

Modelo de Cournot com informação incompleta

- No exemplo a seguir, proposto por Fiani (2015, p. 280-282), duas empresas competem em um duopólio, cuja função de demanda é dada por:

$$p(Q) = 100 - q_1 - q_2$$

- A empresa 1 possui uma função de custo dada por:

$$C_1 = 2q_1$$

- O problema de informação incompleta ocorre pois a empresa 1 não sabe qual é o tipo da empresa 2, e a empresa 2 sabe que a empresa 1 não sabe essa informação.
- A empresa 2 pode ser de dois tipos: alto ou baixo custo, com funções de custo dadas respectivamente por:

$$C_2^A = 4q_2^A \text{ e } C_2^B = 2q_2^B$$

  - Ambas as empresas possuem uma crença comum de que a probabilidade de uma empresa ter alto ou baixo custo é a mesma, ou seja, $p = 0{,}5$.

Desenho de Mecanismo

Desenho de Mecanismo

- Em todos os jogos analisados buscamos entender como os jogadores escolhem seus movimentos estratégicos, para assim definirmos o resultado esperado do jogo. No entanto, em todos esses jogos, ***o desenho do jogo*** (sequência de movimentos e estratégias possíveis) ***já estava definido***.
- Outra questão não menos interessante é a ***definição das regras do jogo***, ou seja, suponha que você não apenas é um dos jogadores, mas é o jogador que define qual será o mecanismo de funcionamento do jogo.
- Vimos também que muitos jogos possuem um resultado (equilíbrio) previsível, pois algumas estratégias são sempre as melhores repostas dos jogadores no momento de interação estratégia. Sendo assim, ***dado um resultado desejado*** para o jogo, a pergunta agora é:

Como podemos desenhar o mecanismo do jogo de tal forma que o resultado desejado seja atingido?

Desenho de Mecanismo

- Mais do que isso, como podemos fazer para que, ***jogando sempre suas melhores repostas***, ***os demais jogadores sejam levados a escolher as estratégias que conduzem ao resultado desejado do jogo***, e que eles o façam simplesmente porque as regras do jogo fazem com essa escolha seja a melhor resposta de cada jogador.

- Para ilustrar a questão, vamos analisar o exemplo apresentado por Fiani (2015, cap. 282-290). Suponha que o governo queira privatizar uma empresa pública, e apenas um comprador se qualifica para comprá-la. No entanto, ***o governo não sabe qual é o tipo do comprador***.

- O comprador, por sua vez, ***pode ser de dois tipos***: existem compradores que ***atribuem elevado valor à empresa pública*** e por isso estão dispostos a pagar um valor de a por ela (chamaremos esse tipo de comprador de comprador do tipo Alto), e há compradores do tipo que ***valorizam pouco*** a empresa pública e por isso estão dispostos a pagar um valor baixo, igual a b pela empresa, tal que $\boldsymbol{a > b > 0}$ (esses são os compradores do tipo Baixo).

NEDUR

Desenho de Mecanismo

- Os dois tipos de compradores ocorrem com probabilidades p (comprador do tipo alto) e $(1-p)$, para o comprador do tipo Baixo. Sendo que ***a crença em relação às probabilidades de cada tipo é informação comum entre o governo e o comprador potencial***.

- **O governo** tem por objetivo maximizar a receita com a venda da empresa pública, e obviamente **gostaria de vender para um comprador do tipo Alto**, a fim de obter um valor maior com a venda.

- Porém, se o governo tem **apenas um comprador** potencial e está decidido a vender a empresa, sem nenhuma regra adicional, mesmo que o comprador que se qualificou para a compra for do tipo Alto, **sua a melhor resposta seria fazer uma oferta de baixo** valor, ou "fingir" ser do tipo Baixo. Por sua vez, se o comprador for do **tipo baixo**, ele irá fazer **uma oferta de no máximo b**.
    - Logo, ***o governo terá no máximo b independente do tipo do comprador***. Quando isso ocorre, ou seja, quando não é possível identificar o jogador a partir da regra estabelecida no jogo, dizemos que temos um ***equilíbrio agregador*.**

Desenho de Mecanismo

- Cabe ao governo **desenhar um mecanismo para o jogo**, de tal forma que, ***a oferta escolhida pelo comprador revele seu tipo***. Ou seja, tal que, a melhor resposta de cada comprador revele qual é o tipo de comprador.
  - Para que isso ocorra, o comprador do tipo Baixo não deve ter interesse em fazer uma oferta do tipo Alto, assim como o comprador do tipo Alto não pode ter interesse em fazer uma oferta do tipo Baixo.
- Quando isso ocorre, ou seja, quando cada jogador revela seu tipo por meio do mecanismo, dizemos que se trata de um ***equilíbrio separador*****.**

Desenho de Mecanismo

- Regra do governo:
  - Se a oferta for maior ou igual a α a venda estará assegurada;
  - Se a oferta for menor ou igual a β, o governo pode decidir se aceita ou não a proposta.
  - Nesse caso, o governo define que aceita a proposta β com probabilidade θ e rejeita com probabilidade $(1-\theta)$.
  - Obviamente, temos que $\alpha > \beta$.
- Se, a partir da definição dos valores de α, β e θ, apenas compradores do tipo Alto escolherem a oferta α e apenas compradores do tipo baixo escolherem β, o objetivo de identificar os compradores será alcançado e o governo poderá extrair o maior excedente com a transação (***equilíbrio separador***).

Desenho de Mecanismo

- A partir dessas definições, ***o comprador do tipo Alto, aceitará comprar a empresa pelo maior valor proposto α***, se, e somente se:

$$a - \alpha \geq \theta(a - \beta)$$

  - Ou seja, se o excedente de fazer a oferta α, i.e., $(a - \alpha)$, for maior do que o excedente de fazer a proposta β, que corresponde a $(a - \beta)$ com probabilidade θ.
  - Vale ressaltar que estamos considerando compradores neutros ao risco.

- Rearranjando a equação, temos:

$$a \geq \frac{\alpha - \theta\beta}{1 - \theta}$$

  - A equação anterior é chamada de ***restrição de compatibilidade de incentivos*** (CI_a), ou seja, ela determina, que os incentivos do desenho de mecanismo sejam compatíveis à escolha do jogador.

Desenho de Mecanismo

- Por sua vez, o jogador do tipo Baixo, escolherá a oferta β, se, e somente se:

$$\theta(b-\beta) \geq b-\alpha$$

  - Ou seja, se o excedente de fazer a oferta β, i.e., $(b-\beta)$, com probabilidade θ, for maior do que o excedente de fazer a proposta α, que corresponde a $(b-\alpha)$.

- Rearranjando a equação, temos:

$$b \leq \frac{\alpha-\theta\beta}{1-\theta}$$

  - A equação anterior também é chamada de ***restrição de compatibilidade de incentivos*** (CI_β), pois garante que o valor de β é compatível com os incentivos dados pelo desenho do jogo, para que o jogador do tipo Baixo, escolha sempre β, e se diferencie do jogador do tipo Alto.

Desenho de Mecanismo

- Adicionalmente, o governo deverá garantir que a transação seja interessante para ambos os tipos de jogadores, uma vez que prefere realizar a venda a não realizar, mesmo que por um valor mais baixo.
- Para que isso ocorra ***precisamos inicialmente definir se os dois tipos de jogadores participam ou não do jogo***.
  - ***O jogador do tipo Alto***, participará apenas se $a \geq \alpha$, ou seja, se o valor proposto pelo governo α não for maior do que se preço reserva.
  - Por sua vez, o **jogador do tipo baixo**, decide participar, apenas se $b \geq \beta$, caso contrário, não estará disposta a adquirir a empresa pública.
- Essas duas restrições $a \geq \alpha$ e $b \geq \beta$, são chamadas de ***restrições de participação*** (RP_a e RP_b, respectivamente), pois definem as condições mínimas necessárias para que todos os tipos tenham interesse em participar do jogo.

Desenho de Mecanismo

- Por sua vez, o problema do governo será a maximização de sua receita com a venda da empresa pública, cujo valor esperado será dada por:

$$\pi_G = p\alpha + (1-p)\theta\beta$$

  - Ou seja, como a probabilidade de encontrar um comprador do tipo alto é de p, o governo tem a chance de obter α com probabilidade p, e com probabilidade $(1-p)$, que corresponde a probabilidade de que o comprador seja do tipo Baixo, o governo obtém β com probabilidade θ, que corresponde a probabilidade de aceitar uma oferta de valor igual a β.

Desenho de Mecanismo

- O **problema do governo** é maximizar a receita sujeito às restrições de compatibilidade de incentivos, e às restrições de participação.

- Logo, o problema do governo será:

$$\max p\alpha + (1-p)\theta\beta$$

$$s.t. \qquad a \geq \frac{\alpha - \theta\beta}{1-\theta} \qquad (CI_a)$$

$$b \leq \frac{\alpha - \theta\beta}{1-\theta} \qquad (CI_b)$$

$$a \geq \alpha \qquad (RP_a)$$

$$b \geq \beta \qquad (RP_b)$$

  - A solução do problema envolve encontrar os valores de α, β e θ, que definem as regras do jogo.

Desenho de Mecanismo

$$\max p\alpha + (1-p)\theta\beta$$

$$
\begin{array}{lll}
s.t. & a \geq \dfrac{\alpha - \theta\beta}{1-\theta} & (CI_a) \\
 & b \leq \dfrac{\alpha - \theta\beta}{1-\theta} & (CI_b) \\
 & \cancel{a \geq \alpha} & (RP_a) \\
 & b \geq \beta & (RP_b)
\end{array}
$$

- O problema pode ser solucionado como um problema de maximização com múltiplas restrições, ou podemos reduzir as restrições e simplificar o problema.
- Podemos rearranjar (CI_a) para:

$$a(1-\theta) \geq \alpha - \theta\beta$$
$$a - \alpha \geq \theta(a - \beta)$$

  - Como a probabilidade θ deve ser sempre positiva, e para que o mecanismo funcione teremos sempre que $a > \beta$, então o lado direto da equação será sempre positivo, o que implica que $a - \alpha \geq 0$ ou $a \geq \alpha$, que é idêntica a RP_a.

Logo a terceira restrição pode ser descartada (não é ativa), uma vez que será sempre alcançada a partir da primeira restrição.

Desenho de Mecanismo

$$\max p\alpha + (1-p)\theta\beta$$

$$s.t. \quad a \geq \frac{\alpha - \theta\beta}{1-\theta} \qquad (CI_a)$$

$$b \leq \frac{\alpha - \theta\beta}{1-\theta} \qquad (CI_b)$$

$$\cancel{a \geq \alpha} \qquad (RP_a)$$

$$b \geq \beta \qquad (RP_b)$$

Ainda na primeira restrição, suponha que:

$$a > \frac{\alpha - \theta\beta}{1-\theta}$$

- Nesse caso, o governo poderia aumentar α e/ou reduzir θ (aumentar a rejeição de β), elevando sua receita, e ainda assim, o comprador do tipo Alto teria interesse em escolher α, relevando seu tipo.

- Logo, o governo estará maximizando sua receita, apenas se:

$$a = \frac{\alpha - \theta\beta}{1-\theta}$$

- Como sabemos que $a > b$ e que $b \leq \frac{\alpha-\theta\beta}{1-\theta}$, deduzimos que:

$$b < \frac{\alpha - \theta\beta}{1-\theta}$$

Desenho de Mecanismo

$$\max p\alpha + (1-p)\theta\beta$$

$$
\begin{array}{llll}
s.t. & a = \dfrac{\alpha - \theta\beta}{1-\theta} & & (CI_a) \\
 & b < \dfrac{\alpha - \theta\beta}{1-\theta} & & (CI_b) \\
 & \cancel{a \geq \alpha} & & (RP_a) \\
\beta = b & \cancel{b \geq \beta} & & (RP_b)
\end{array}
$$

- Finalmente, utilizando a restrição de participação de b, se $\beta < b$, o governo poderia aumentar β para aumentar sua receita. Logo, para maximizar o lucro, o governo deverá definir necessariamente $\beta = b$.
- Substituindo esse resultado em CI_b:

$$\beta(1-\theta) < \alpha - \theta\beta$$

$$\beta - \theta\beta < \alpha - \theta\beta$$

$$\beta < \alpha$$

  - O que já estava definido por pressuposto.

Desenho de Mecanismo

$$\max p\alpha + (1-p)\theta\beta$$

$$s.t. \qquad a = \frac{\alpha - \theta\beta}{1-\theta} \qquad (CI_a)$$

$$\cancel{b < \frac{\alpha - \theta\beta}{1-\theta}} \qquad (CI_b)$$

$$\cancel{a \geq \alpha} \qquad (RP_a)$$

$$b = \beta \qquad (RP_b)$$

- Substituindo $b = \beta$ em $a = \frac{\alpha-\theta\beta}{1-\theta}$, temos:

$$a = \frac{\alpha - \theta b}{1-\theta}$$

$$\alpha = a(1-\theta) + \theta b$$

Desenho de Mecanismo

$$\max p\alpha + (1-p)\theta\beta$$
$$s.t. \qquad \alpha = a(1-\theta) + \theta b$$

- Assim, a receita esperada pelo governo será:

$$\pi_G = p[a(1-\theta) + \theta b] + (1-p)\theta b$$
$$\pi_G = pa - pa\theta + p\theta b + \theta b - p\theta b$$

- Logo:

$$\pi_G = pa + \theta(b - pa)$$

Desenho de Mecanismo

$$\pi_G = pa + \theta(b - pa)$$

- Se $b < pa$, o governo deve terminar $\theta = 0$ para maximizar sua receita, ou seja, não deverá vender se o preço for inferior a a. Se $b > pa$, o governo maximiza sua receita com $\theta = 1$, garantindo a venda pelo valor mínimo β.
- Logo, o desenho de mecanismo ótimo dependerá exclusivamente dos valores de a, b e p. E a relação entre esses valores define a resposta ótima do governo para as regras do jogo.
- Por exemplo, suponha que o governo se defronte com os seguintes dados: a = 30 milhões, b = 10 milhões, p = 20%. Qual seria o valor ótimo de θ a ser fixado pelo governo?

$$pa = 0{,}2 \times 30 = 6$$

$$b > pa$$

  - Logo, a melhor escolha do governo é definir $\theta = 1$

Desenho de Mecanismo

- Com essa solução podemos dizer que o resultado do jogo é ***revelador da verdade***, ou seja, revela exatamente os tipos de cada jogador. Essa conclusão é formalizada pelo ***princípio de revelação***.
- Em um jogo com jogadores do tipo A e B, em que cada conjunto de estratégias é representado por s e o resultado da adoção do conjunto s é representado por y, os resultados (payoffs do jogo) para os jogadores dos tipos A e B, um resultado será compatível com incentivos, se nenhum dos jogadores preferir nenhuma outra estratégia e resultados à estratégia e resultados atribuídos pelo mecanismo.
- Formalmente, temos que, se s^a e y^a e s^b e y^b são alocações compatíveis aos incentivos para os tipos A e B respectivamente, então:

$$r(s^a, y^a, A) \geq r(s, y, A)$$

$$r\left(s^b, y^b, B\right) \geq r(s, y, B)$$

$$\forall s \text{ e } y$$

Desenho de Mecanismo

- Dizemos então, que um **mecanismo** de **revelação direta** é um jogo bayesiano simultâneo no qual os jogadores informam seu tipo a um árbitro, o qual utiliza essas informações para determinar a recompensa dos jogadores. Vale ressaltar, que, se o mecanismo é compatível com incentivos, por pressuposto, então nenhum dos tipos terá interesse em informar o tipo errado ao árbitro, uma vez que revelar o tipo verdadeiro é sua melhor resposta no jogo bayesiano simultâneo.
- Com essas definições, podemos estabelecer o chamado **Princípio da Revelação:**

"Um mecanismo direto é dito compatível com incentivos se, para os jogadores, informar o seu verdadeiro tipo é um equilíbrio de Nash bayesiano. Qualquer equilíbrio de Nash Bayesiano pode ser representado por um mecanismo direto compatível em incentivos" (Fiani, 2015, p. 293).

Próxima aula...

Jogos Sequenciais de Informação Incompleta

NEDUR

Núcleo de Estudos em Desenvolvimento Urbano e Regional

Universidade Federal do Paraná

Av. Prefeito Lothário Meissner, nº 632 – Setor de Ciências Sociais | UFPR

www.nedur.ufpr.br

nedur.ufpr@gmail.com