

Prof^a. Kênia Barreiro de Souza

Professora do Departamento de Economia e do Programa de Pós-Graduação em Desenvolvimento Econômico da Universidade Federal do Paraná e Pesquisadora do Núcleo de Estudos em Desenvolvimento Urbano e Regional (NEDUR)

Material desenvolvido para a disciplina de Teoria dos Jogos (SE358) do Curso de Ciências Econômicas da Universidade Federal do Paraná (UFPR). O uso desse material fica autorizado em outros cursos desde que devidamente citados os créditos.

Janeiro/2021



Referências

FIANI, R. (2015) Teoria dos Jogos. 4ª edição. Editora Campus. (Capítulo 6)

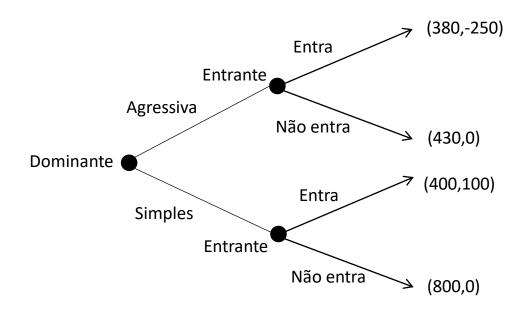
BIERMAN, H. S. FERNANDEZ, L. (2011) Teoria dos Jogos. Editora Pearson. (Capítulos de 6 a 9)



- Nos jogos dinâmicos, ou sequenciais, os jogadores se movem em uma ordem pré-estabelecida.
- Por exemplo, em um jogo de xadrez há uma sequência de movimentos, tal que qualquer jogador racional, jogando xadrez irá levar em consideração as decisões de seu oponente no momento em que toma suas próprias decisões, e buscará prever quais são essas decisões.
- Dentro da sequência de movimentos não simultâneos, o jogador conhece a história do jogo e, assumindo conhecimento comum da racionalidade, toma decisões com base nessa história.



Para aplicar os novos conceitos, suponha um mercado de softwares em que há uma empresa dominante e uma empresa potencial entrante, cujos movimentos estão representados na árvore ao lado:



Fonte: Adaptado de Bierman e Fernandez (2011)



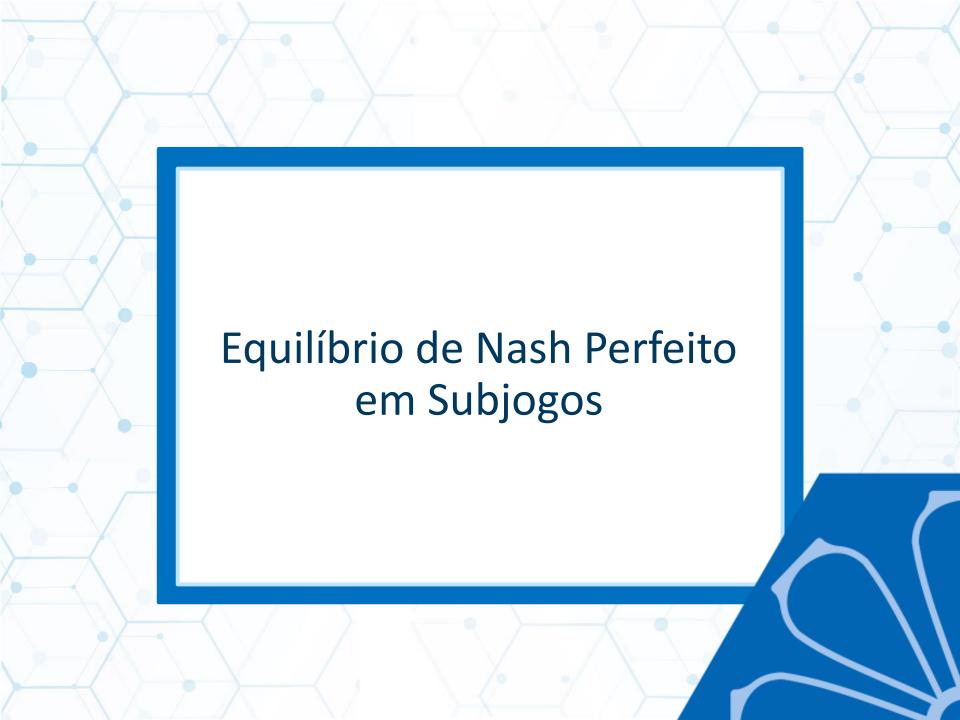
 Com o conhecimento dos jogos estáticos, poderíamos tentar buscar um equilíbrio de Nash do jogo, utilizando a forma estratégia do jogo da entrada:

Entrante

Dominante	Entra, Entra	Entra, Não entra	Não entra, Entra	Não entra, Não entra
Agressiva	(380,-350)	(380,-350)	(430,0)	(430,0)
Simples	(400,100)	(800,0)	(400,100)	(800,0)

Há dois equilíbrio de Nash no jogo.

 Porém, dado o movimento sequencial do jogo, e dado que a dominante tem a vantagem de ser a primeira, qual dos dois equilíbrios seria mais provável?





Entrante

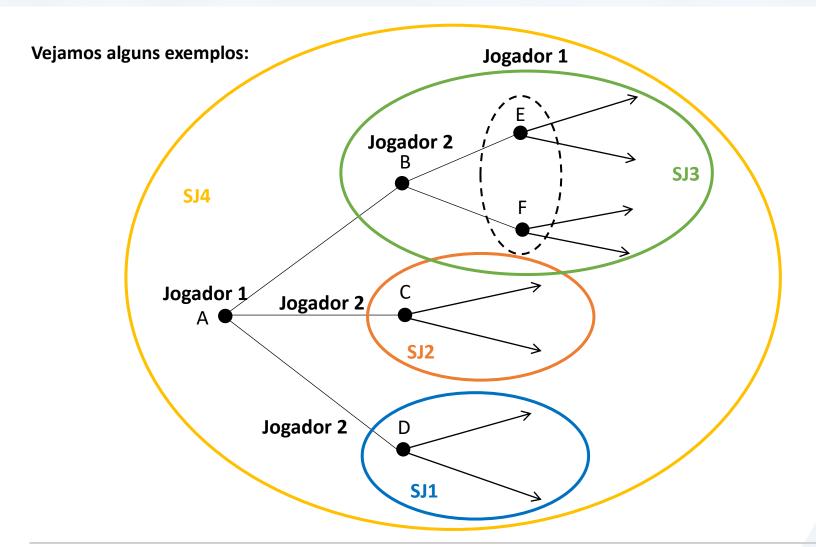
Dominante	Entra, Entra	Entra, Não entra	Não entra, Entra	Não entra, Não entra
Agressiva	(380,-350)	(380,-350)	(430,0)	(430,0)
Simples	(400,100)	(800,0)	(400,100)	(800,0)

- Se a empresa dominante é racional e sabe que a entrante também é racional, sabe que se fizer uma campanha agressiva a entrante não entrará no mercado, e seu lucro será de 430. Por sua vez, se a campanha publicitária for simples, a concorrente entra no mercado e o lucro será de 400.
- Com base no conhecimento comum da racionalidade dos jogadores, podemos concluir que *a empresa dominante jogará com campanha publicitária agressiva*, e o equilíbrio do jogo será {Agressiva, (Não entra, Entra)}.
 - Essa dedução está diretamente relacionada a dominância de estratégias em jogos sequenciais, que deve levar em consideração a sequência de movimentos.



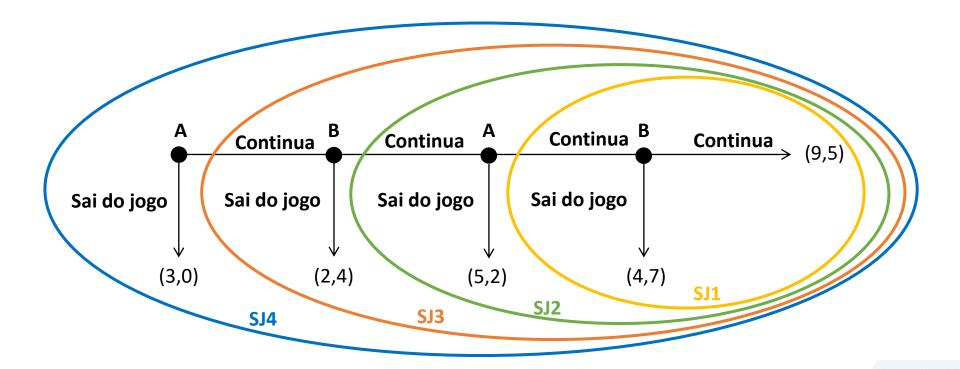
- Esse refinamento de equilíbrios de Nash é chamado de Equilíbrio de Nash Perfeito em Subjogos (ENPS). Para entender o conceito, precisamos entender o que é um subjogo.
- Formalmente, temos a seguinte definição (Fiani, 2015, p. 222):
 - Em um jogo da forma extensiva, um subjogo obedece às seguintes condições:
 - 1. Inicia-se em um único nó de decisão;
 - 2. Contém todos os nós que se seguem ao nó no qual se inicia;
 - 3. Se contiver qualquer nó de um conjunto de informação, ele contém todos os nós do conjunto de informação.







Vejamos alguns exemplos:





A partir do conceito de subjogos, podemos definir o ENPS:

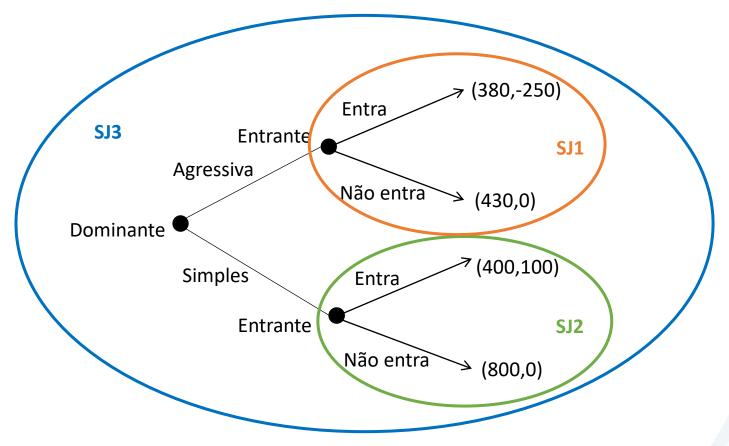
Uma combinação de estratégias é um equilíbrio de Nash Perfeito em Subjogos se ela preenche, simultaneamente, as duas condições seguintes:

- i. é um equilíbrio de Nash para o jogo em sua totalidade, e;
- ii. é um equilíbrio de Nash para cada subjogo (Fiani, 2015, p. 228).

 Ou seja, no ENPS cada um dos jogadores está jogando sua a melhor resposta para todos os subjogos do jogo.

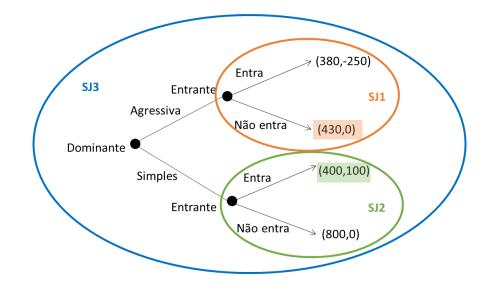


No exemplo do jogo da entrada apresentado anteriormente temos três subjogos:





- Já sabemos, que os dois equilíbrios de Nash do jogo são:
 - {Simples, (Entra, Entra)};
 - {Agressiva, (Não entra, Entra)}.
- Considerando apenas o subjogo 1 (SJ1), a entrante toma decisão, logo tem como melhor resposta "Não entra", se a dominantes escolhe agressiva, o que é compatível com o perfil {Agressiva, (Não entra, Entra)}.
- No subjogo 2 (SJ2), a melhor resposta da entrante seria entrar, logo o perfil {Agressiva, (Não entra, Entra)} é compatível com o equilíbrio do subjogo 2.

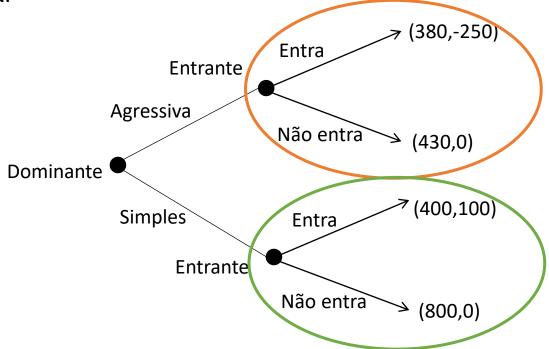


 No jogo completo, SJ3, dado que a entrante escolhe não entrar se a dominante joga agressiva e entrar se a dominantes joga simples, a melhor resposta da dominante é jogar agressiva.

Logo, {Agressiva, (Não entra, Entra)} é um equilíbrio de Nash em todos os subjogos.

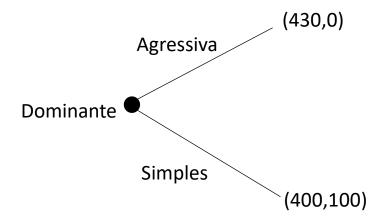


- Felizmente existe uma forma mais simples para chegar a ENPS.
- Dado que assumimos que os jogadores são racionais, as decisões em cada uma das etapas do jogo podem ser antecipadas pelo método conhecido como indução retroativa.





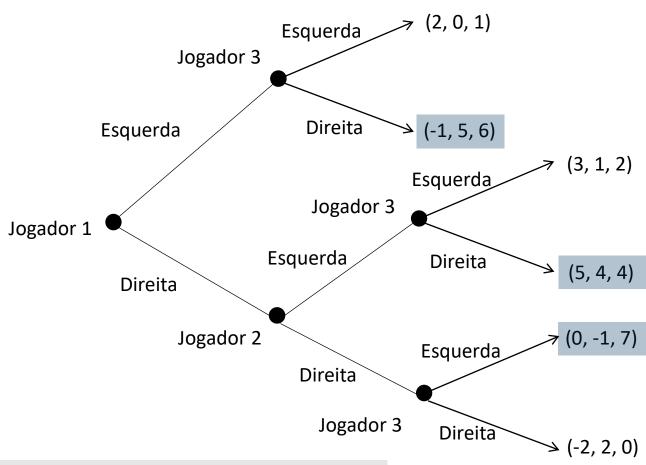
 Sendo assim, a dominante pode simplificar o jogo, e representa-lo na forma reduzida como:





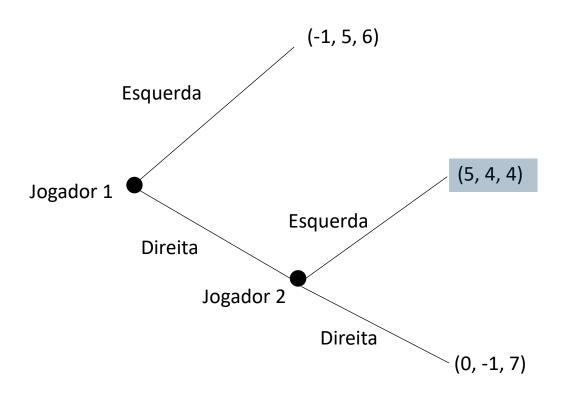
- Conforme ilustra o exemplo, *a indução retroativa apela pela <u>racionalidade</u> <u>sequencial das estratégias</u>, começando nos últimos movimentos do jogo e voltando até o primeiro resultado.*
- Dessa forma, são selecionados apenas resultados factíveis de cada parte do jogo, ou seja, cada jogador está especificando suas ações ótimas em cada nó de decisão da árvore, e o jogador anterior está antecipando esse comportamento.
- Assim, desde que não exista nenhum passo em que algum dos agentes seja indiferente entre dois resultados, será possível prever o resultado final do jogo.





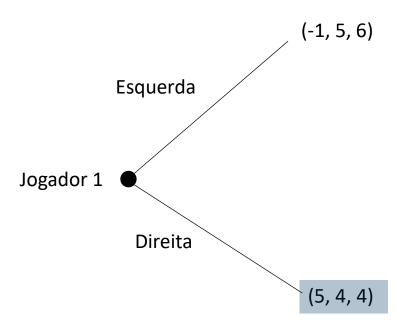
Vejamos mais um exemplo no qual podemos aplicar indução retroativa para deduzir o resultado. Três jogadores movimentamse de forma sequencial, conforme representado abaixo. Os payoffs seguem a seguinte ordem: (Jogador 1, Jogador 2, Jogador 3).





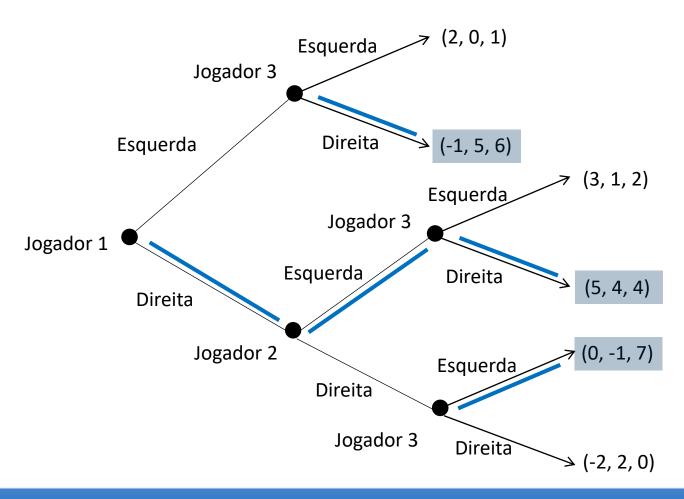
O jogador 2 antecipa os movimentos do jogador 3, e e escolhe sua melhor resposta como se o jogo simplificado funcionasse como na figura acima.





O jogador 1 antecipa os movimentos dos jogadores 2 e 3, e escolhe sua melhor resposta como se o jogo simplificado funcionasse como na figura acima.





Logo, o perfil de estratégias de equilíbrio do jogo será dado por: {Direita, (Esquerda se o Jogador 1 joga direita), (Direita se o jogador 1 joga esquerda, Direita se o Jogador 2 joga Esquerda e o Jogador 1 joga Direita, Esquerda se o Jogador 2 joga Direita e o Jogador 1 joga Direita)}.



 Como pode ser observado, nos dois exemplos apresentados, o jogo possui solução única, porém isso ocorre em um conjunto limitado de jogos, conforme mostra a seguinte preposição:

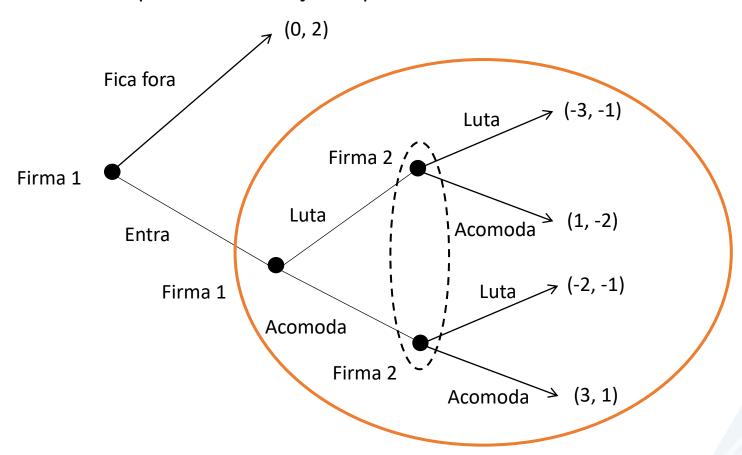
Todo **jogo finito de informação perfeita** possui um equilíbrio de Nash perfeito em subjogos para estratégias puras que pode ser derivado por <u>indução retroativa</u>.

Ademais, se **nenhum dos jogadores** possui o **mesmo payoff** em nenhum de dois nós terminais, então existe **um equilíbrio de Nash Perfeito em subjogos único** que pode ser derivado dessa forma. (Mas-Colell et al., 1995, p. 276)

- Logo, poderá haver mais de um equilíbrio quando o jogo for infinito, possuir informação imperfeita e/ou possui algum subjogo no qual o agente é indiferente entre dois resultados.
- Quando houver informação imperfeita, o mesmo procedimento pode ser adotado, apenas não podemos garantir que o resultado será único.



• Vejamos um exemplo com informação imperfeita:



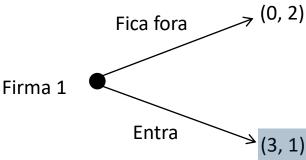


 Nesse caso, temos apenas dois subjogos. O jogo como um todo e o subjogo de informação imperfeita, no qual definem simultaneamente se lutam ou acomodam.
 Esse último subjogo, pode ser representado da seguinte forma:

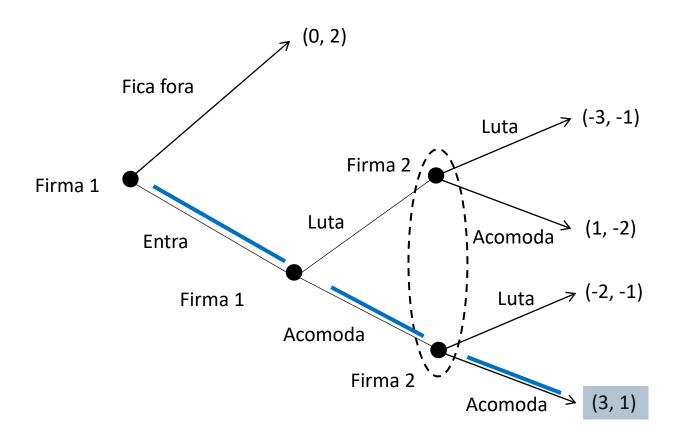
Firma 2

Firma 1	Luta	Acomoda
Luta	-3, -1	1, -2
Acomoda	-2, -1	3, 1

• O equilíbrio de Nash do subjogo é {Acomoda, Acomoda}. Logo, o jogo pode ser reduzido para:



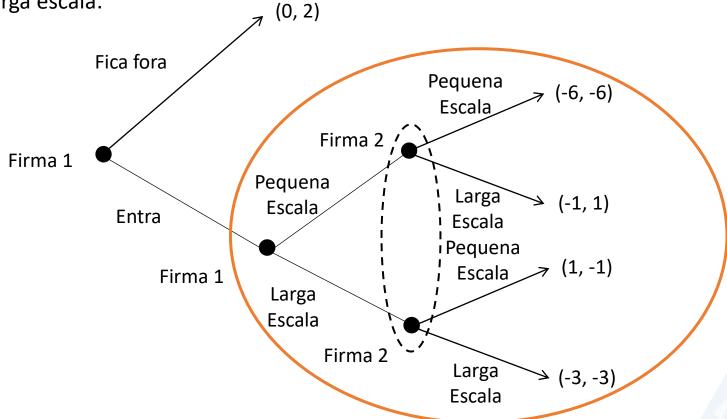




O *equilíbrio de Nash perfeito em subjogos* será: {(Entra, Acomoda se Entra), Acomoda se a Firma 1 Entra}.



Nem sempre haverá apenas um equilíbrio. No jogo a seguir, a firma 1 e a firma 2 jogam um subjogo simultâneo no qual decidem se competem em pequena escala ou larga escala:



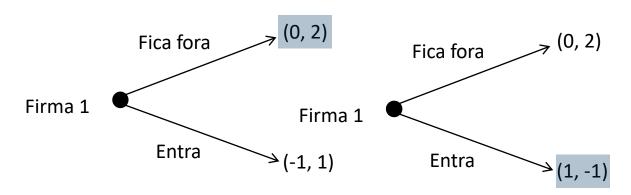


 Novamente, podemos representar o subjogo na forma estratégica e encontrar os equilíbrios de Nach

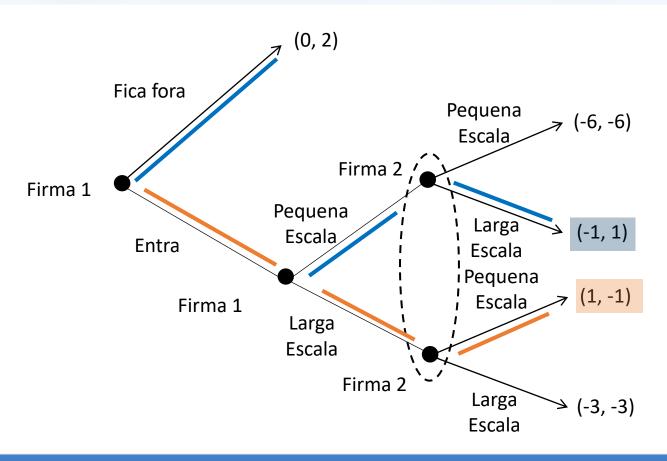
Firma 2

Firma 1	Pequena Escala	Larga Escala	
Pequena Escala	-6, -6	-1, 1	
Larga Escala	1, -1	-3, -3	

 Logo, haverá duas formas reduzidas, cada uma contendo um equilíbrio de Nash Perfeito em subjogos:

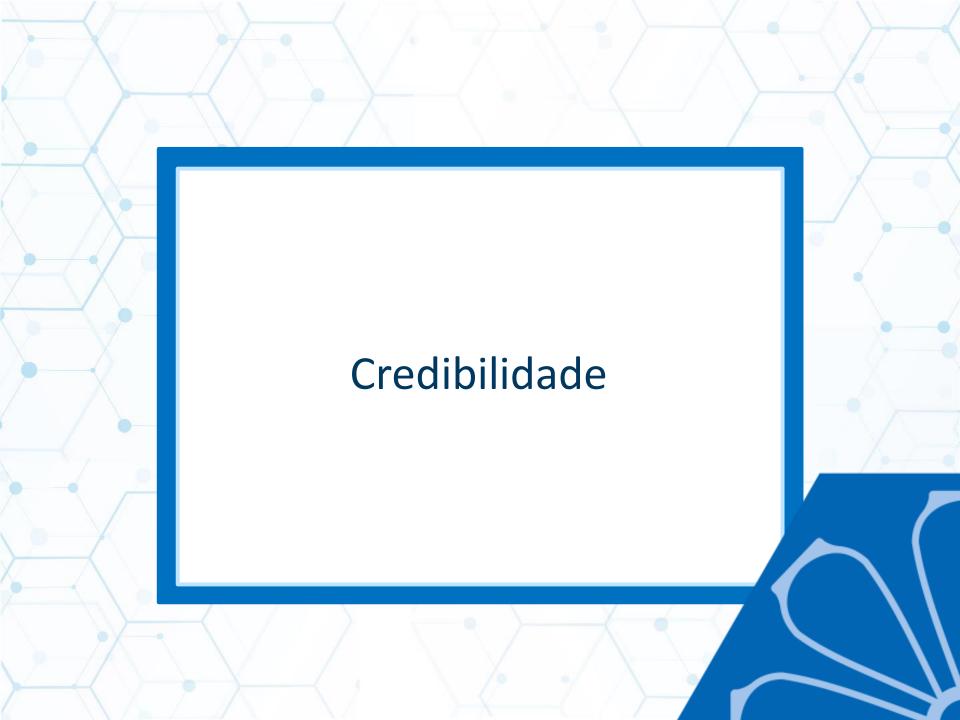






Há dois possíveis equilíbrios de Nash Perfeito em Subjogos:

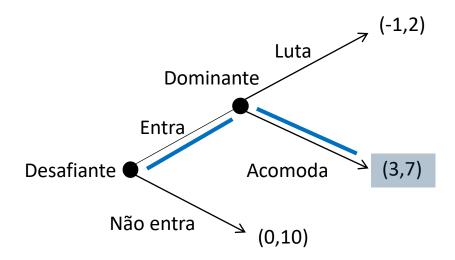
{(Fica Fora, Pequena Escala se Entra), Larga Escala se a Firma 1 Entra em Pequena Escala} {(Entra, Larga Escala se Entra); Pequena Escala se a firma 1 Entra em Larga Escala}





Credibilidade

• Vamos voltar ao exemplo do jogo da entrada apresentado no tópico 1.



O resultado é claramente ruim para a empresa Dominante.
Porém, se a dominante ameaça lutar, a desafiante deveria acreditar nessa ameaça?



Credibilidade

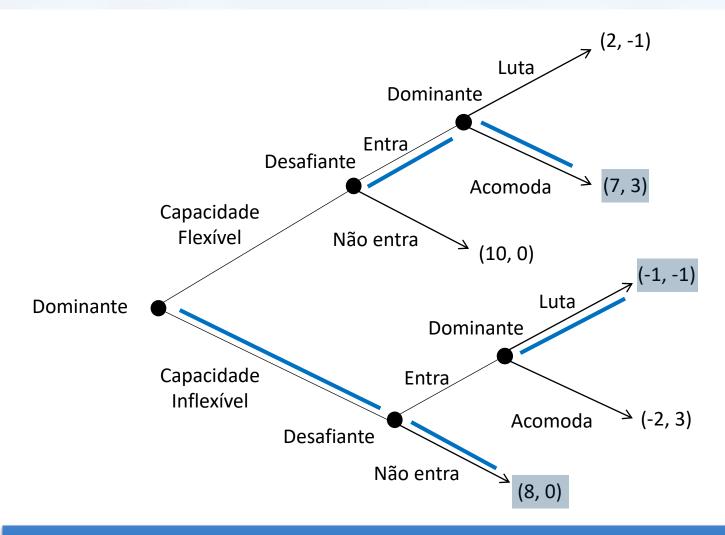
 Não obstante, a empresa dominante pode querer mudar o jogo por meio de um movimento estratégico:

"Movimentos estratégicos são ações adotadas pelos jogadores que visam alterar alguma característica do jogo, em geral, a ordem em que os jogadores jogam ou as recompensas dos jogadores" (Fiani, 2015, p. 242).

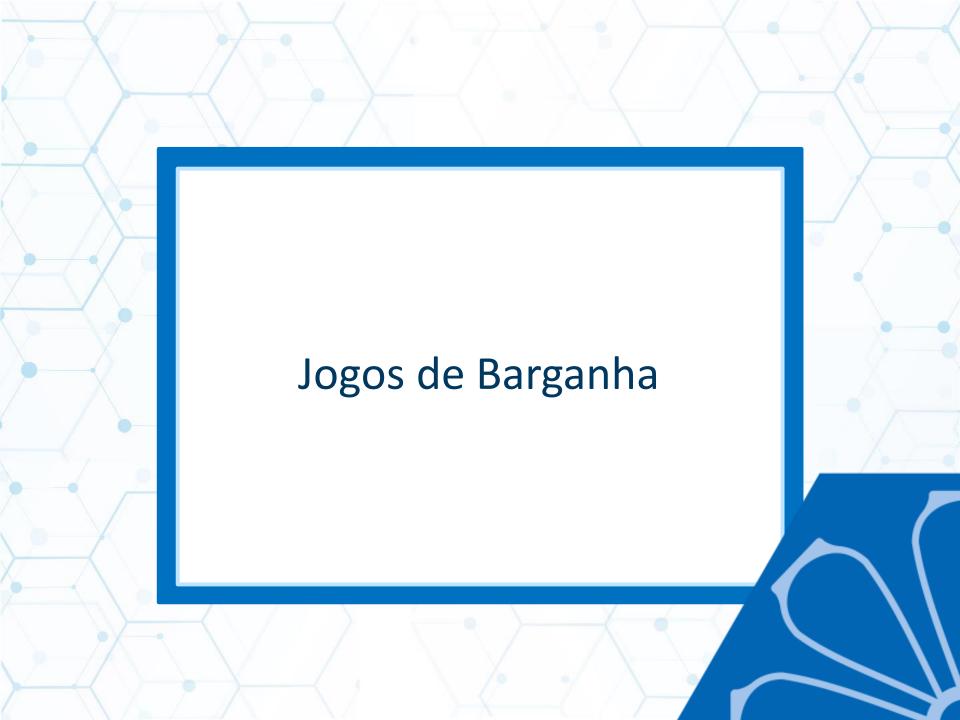
• No caso do jogo da entrada, a dominante poderia fazer um elevado investimento em capacidade produtiva, de tal forma que, sua melhor resposta seria lutar.



Credibilidade



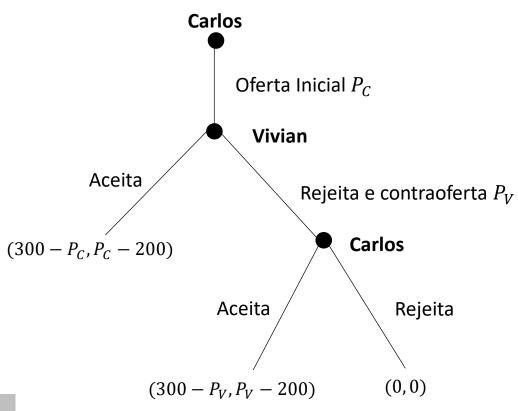
O equilíbrio de Nash perfeito em subjogos passa a ser: {(Capacidade Inflexível, Acomoda se a Desafiante entra quando a capacidade é flexível, Luta se a desafiante entra quando a capacidade é inflexível), (Entra se a dominante joga Capacidade Flexível, Não entra se a dominante joga capacidade inflexível}.





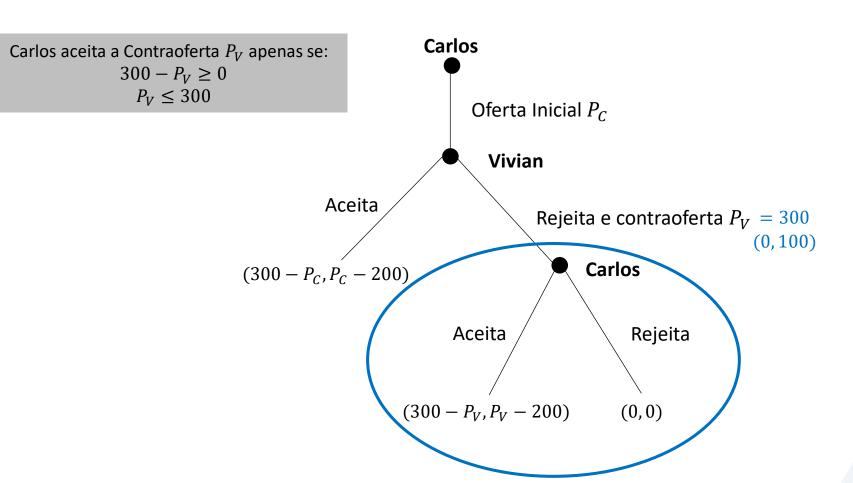
- Os jogos de barganha são todos aqueles que envolvem algum tipo de negociação entre duas partes. Os jogos de barganha mais comuns são aqueles em que ocorre negociação de preços entre um comprador e um vendedor.
- Vamos analisar essa situação no exemplo apresentado por Bierman e Fernandez (2011):
 - Carlos e Vivian estão negociando um produto pelo qual Carlos está disposto a pagar até
 R\$ 300, e Vivian está disposta a vender por no mínimo 200 reais, essas informações são de conhecimento comum no jogo.
 - Vamos inicialmente analisar o jogo sequencial no qual Carlos faz a primeira oferta, Vivian decide se aceita a oferta ou se faz uma contraoferta, e na última rodada Carlos decide se aceita ou não a oferta de Vivian.





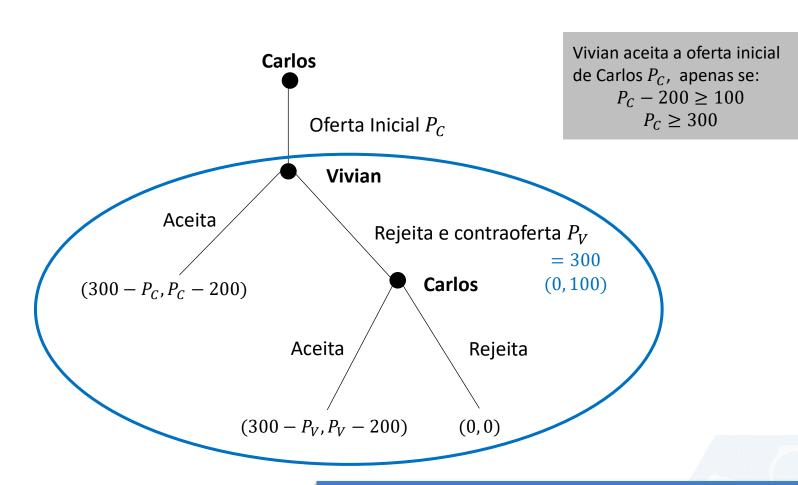
Preço Reserva de Carlos: 300 Preço Reserva de Vivian: 200





Logo, nesse subjogo, Vivian sabe que Carlos aceita qualquer $P_{\nu} \leq 300$, sua melhor resposta é jogar $P_{V} = 300$

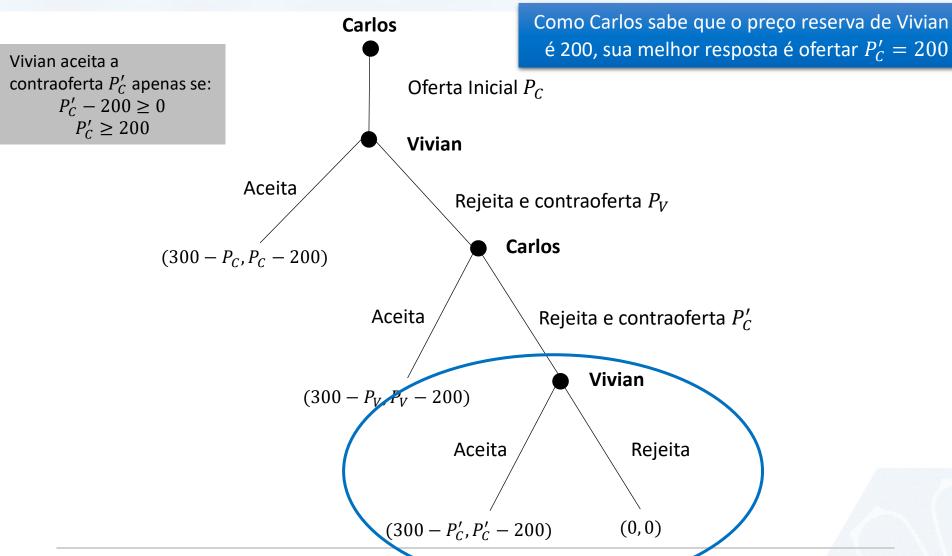




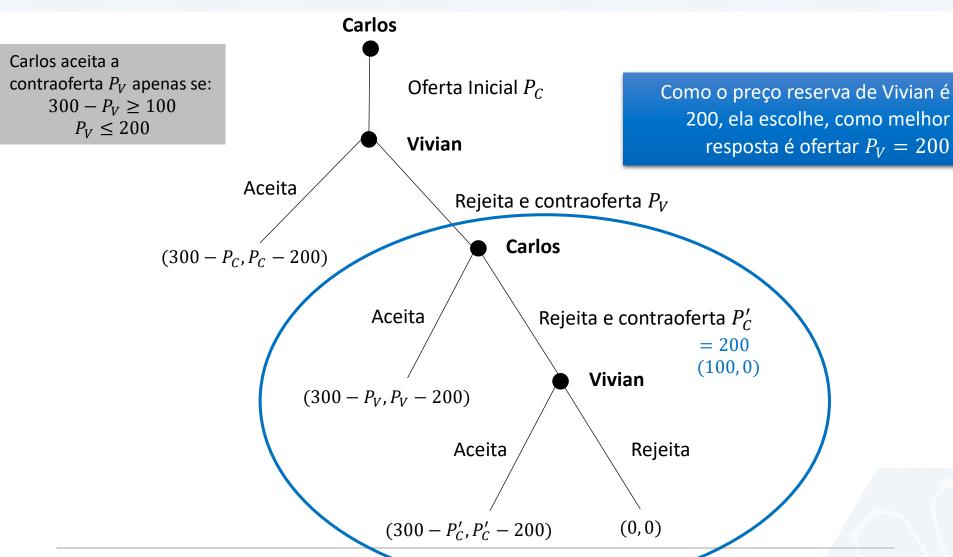
Logo, a melhor resposta de Carlos é jogar $P_C = 300$

Carlos fará uma oferta inicial de 300, Vivian aceita. Ela fica com payoff de 100, e Carlos de 0.

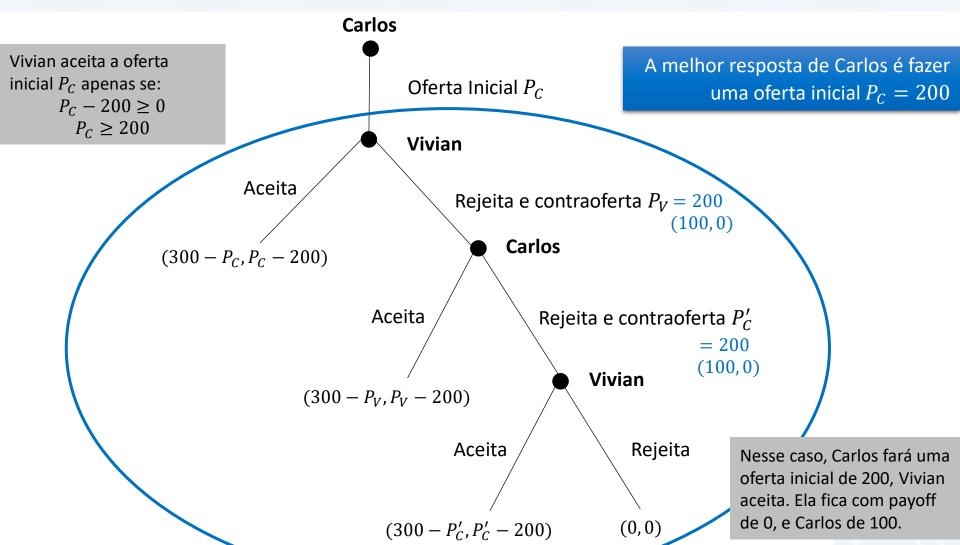














- A conclusão que podemos chegar com esses jogos é de que, diferente da guerra de preços e quantidades, em que as firmas têm vantagens ao serem as primeiras a jogar, no caso da barganha, haverá vantagem em determinar a última oferta.
- Porém, essa conclusão será válida, apenas se os preços-reserva de ambos os jogadores for de conhecimento comum.
- Uma estratégia comum é simplesmente não revelar o preço reserva, evitando que o oponente possa extrair todo o seu excedente (porém, nesse caso, estaríamos diante de um jogo de informação incompleta, no qual os jogadores desconhecem os payoffs de seus adversários).
- Outra questão que afeta diretamente a solução do problema é *a impaciência dos negociadores*.



- Suponha que tanto o comprador quanto o vendedor considerem que existe um custo de oportunidade a cada rodada de negociação.
- Com o mesmo exemplo anterior, vamos supor que a vendedora, Vivian, realiza a primeira e a última oferta em um total de cinco rodadas, e que ambos têm um custo de oportunidade de 3% para cada rodada.
- Consequentemente, cada um dos jogadores gostaria de terminar o jogo antes, 3% é o custo da impaciência de chegar até a última rodada.



- Por indução retroativa, devemos começar pela última rodada de negociação, nela Vivian (vendedora) faz sua oferta, e o comprador, Carlos, aceita qualquer valor menor ou igual a 300, portanto, a melhor opção de Vivian é a proposta $P_V =$ 300.
- Na rodada anterior, Carlos sabe que Vivian tem um custo de oportunidade de 3%, e que *ela teria um excedente de R\$ 100 se esperar até a última rodada*, mas aceitaria um excedente de $100 \times (1 - 0.03) = 97$ reais na rodada anterior, pois **R\$ 3** é o custo de oportunidade de esperar até a última rodada. Logo, Carlos poderá propor um preço de $P_{C\ _\ 297}$ na quarta rodada, que será aceito por Vivian.
- Continuando a mesma lógica, Vivian sabe que Carlos estaria disposto a abrir mão de 3% do seu excedente se a negociação terminasse na terceira rodada, logo, Vivian pode propor um preço $P'_{V} = 300 - 0.03 \times 3 = 297.09$, e Carlos aceitaria essa oferta.



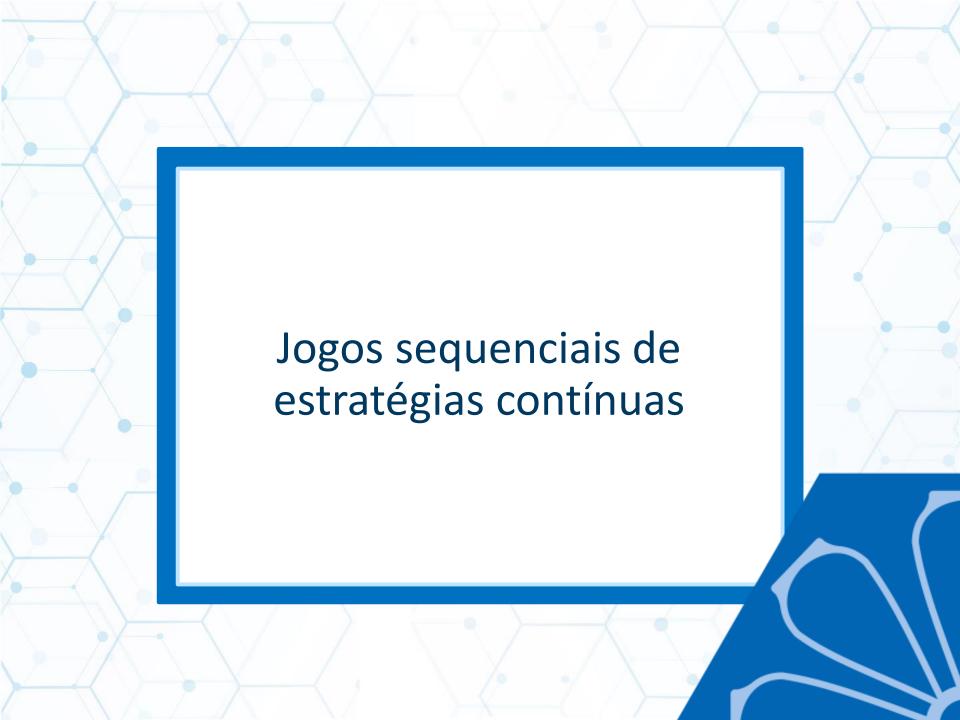
Rodada	Oferta	Valor da oferta	Excedente da vendedora	Excedente do comprador
5	Vendedora	300,00	100,00	0,00
4	Comprador	297,00	97,00	3,00
3	Vendedora	297,09	97,09	2,91
2	Comprador	294,18	94,18	5,82
1	Vendedora	294,35	94,35	5,65

Note que, nesse caso, muito embora Vivian continue com *grande vantagem por ser a última a fazer a oferta*, seu excedente é menor em relação ao caso sem impaciência



- Com impaciência, haveria uma tendência a redução do excedente de Vivian e aumento no excedente de Carlos.
- Após tantas rodadas, os excedentes estariam distribuídos de forma mais equilibrada entre os negociadores, o que parece mais próximo da realidade.

Planilha: Barganha.xlsx





Jogos sequenciais de estratégias contínuas

- A semelhança dos modelos de Bertrand e Cournot, podemos analisar oligopólios como jogos sequenciais com estratégias contínuas em que um dos jogadores se move primeiro. O modelo de liderança por quantidades e o modelo de liderança de preços.
- O primeiro é mais conhecido como *modelo de Stackelberg*, em que uma das empresas determina a quantidade a ser produzida e outra ou outras empresas tomam essa quantidade como dada para montar sua própria estratégia.
- No modelo de liderança de preços, o preço do mercado é determinado por uma empresa líder, e as demais jogam sequencialmente.



O modelo de Stackelberg

- Em um oligopólio de duas empresas, a empresa 1, líder do mercado, toma sua decisão de quantidade de produção e a empresa 2, se guidora, escolhe na sequência a quantidade, dada a estratégia da líder.
- Vamos assumir que a demanda com que esse mercado se defronta é do tipo linear e pode ser representada como:

$$p(q) = A - b(q_i + q_j)$$

Os custos de ambas as empresas podem ser representados por:

$$C_i = cq_i$$
, $i = 1, 2$

Resultados:

$$q_1^* = \frac{A-c}{2b}$$
 $q_2^* = \frac{A-c}{4b}$

Cournot:

$$q^* = \frac{A - c}{3b}$$



A empresa líder está produzindo mais do que em um equilíbrio de Cournot, enquanto a seguidora produz uma quantidade inferior.



O modelo de liderança de Preços

- Quando a liderança é de preços, a empresa líder assume o primeiro movimento determinando os preços e todas as demais seguem os preços determinados pela empresa líder.
- Nesse caso, as empresas seguidoras atuam como tomadoras de preços, enquanto a empresa líder atua como monopolista de uma parcela do mercado.
- Nessa situação, cria-se o chamado conluio tácito. Situação na qual, embora não exista uma combinação explícita de preços, as empresas são capazes de manter preços acima do custo marginal, simplesmente porque uma delas tem maior poder de mercado e consegue fazer com que todas as demais sejam suas seguidoras.



O modelo de liderança de Preços

• Seguindo o exemplo apresentado por Fiani (2015), temos um mercado em que uma empresa exerce liderança de preços e existem n outras empresas seguidoras. A oferta das empresas seguidoras é dada por:

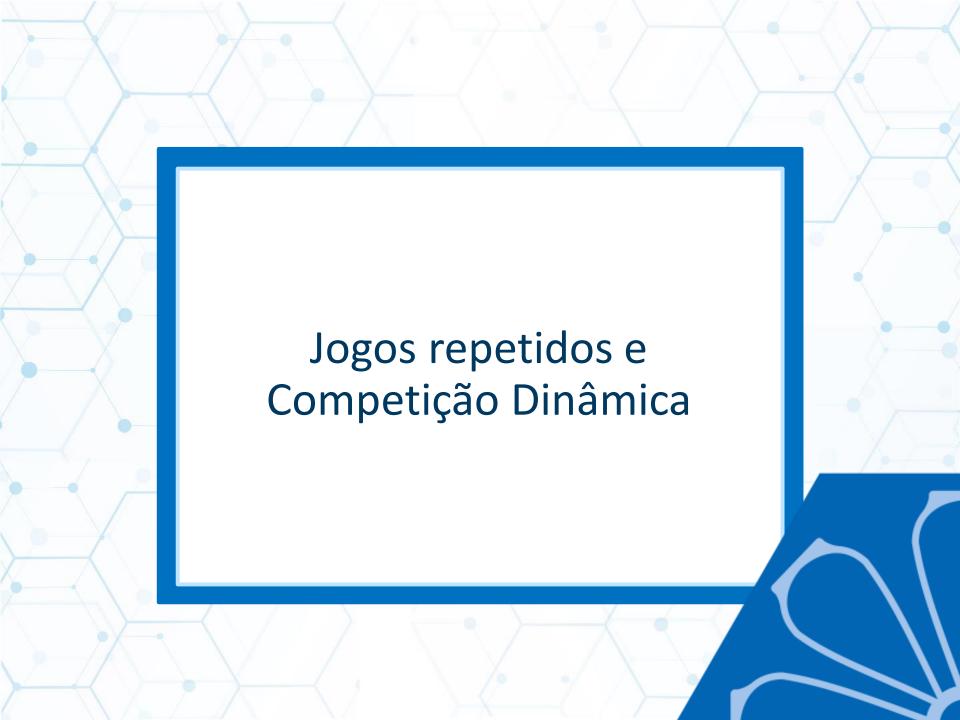
$$q_S = \sum_{i=1}^n q_i = 4p$$

- \circ Em que p é o preço de mercado (determinado pela líder).
- A demanda total do mercado é dada por:

$$D_T = 100 - p$$

• E o custo da empresa líder é:

$$c_L = 2q_L$$





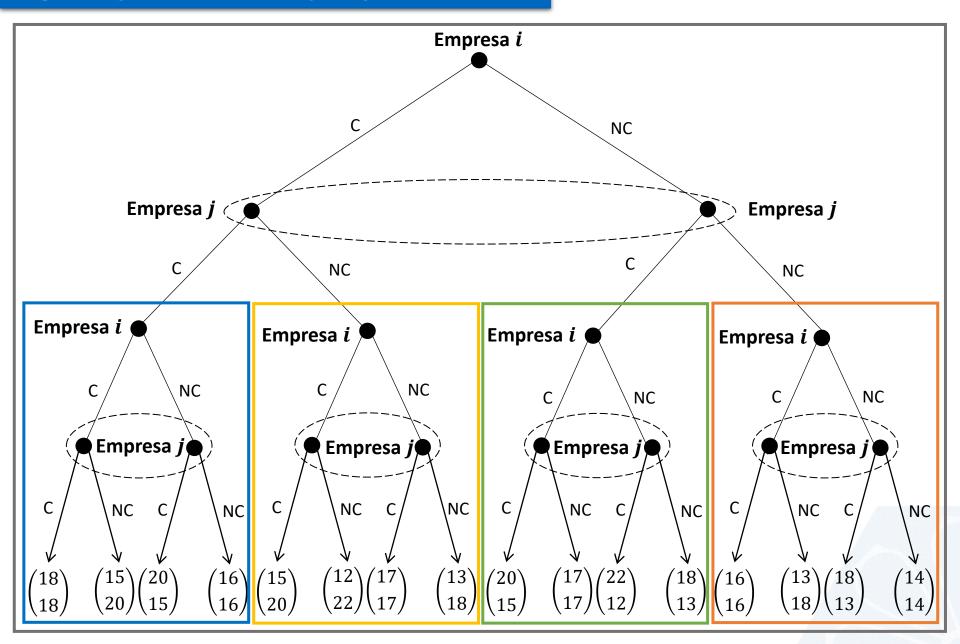
- Duas firmas competem em um mercado oligopolista em que cada uma deve decidir qual a quantidade produzir dada a quantidade produzida pela outra firma. As duas produzem o mesmo produto e competem igualmente no mercado (Bierman e Fernandez, 2011, cap.9).
- Como já vimos anteriormente, nesses casos, há um incentivo para que as firmas façam um acordo cooperativo (atuando como um cartel), visto que o lucro de cartel é maior do que o lucro de não-cooperativo, ou seja, quando competem em um modelo de Cournot.
- O quadro abaixo resume o que ocorre quando as firmas decidem cooperar ou não cooperar em um jogo simultâneo:

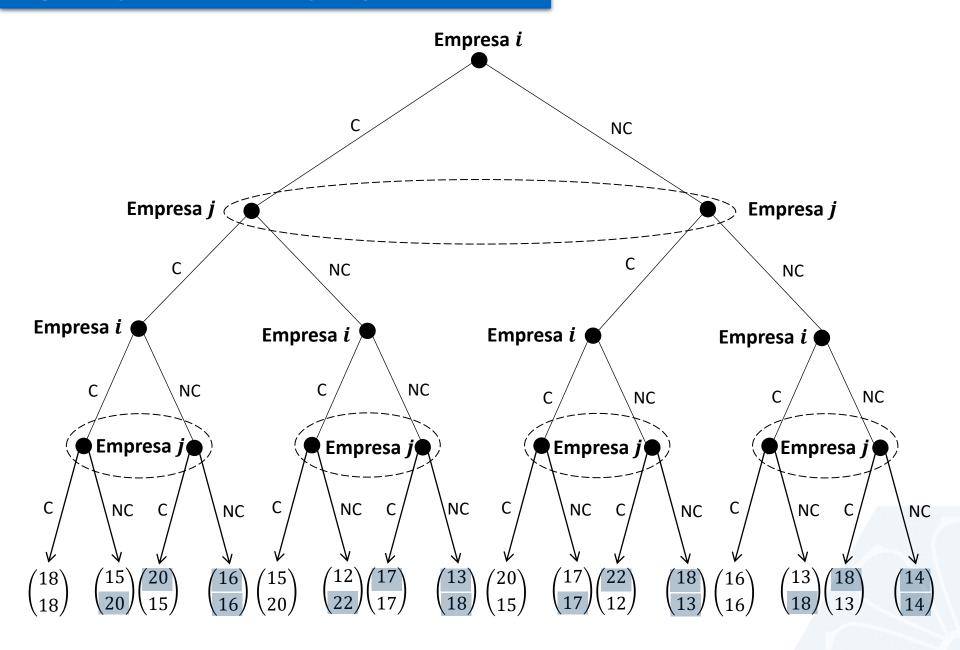
Empresa j

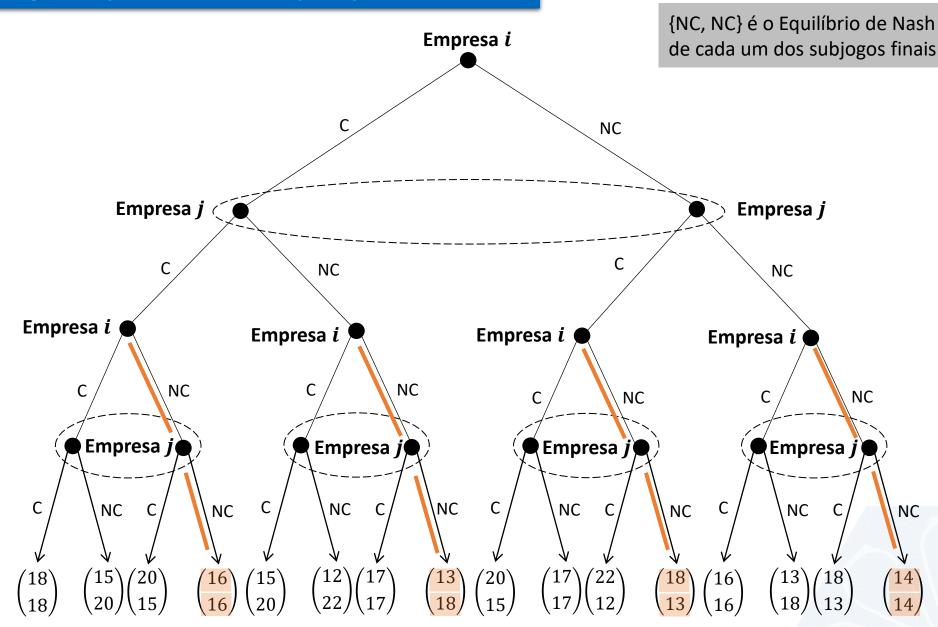
Empresa i	Coopera	Não coopera	
Coopera	(9, 9)	(6, 11)	
Não coopera	(11, 6)	(7, 7)	

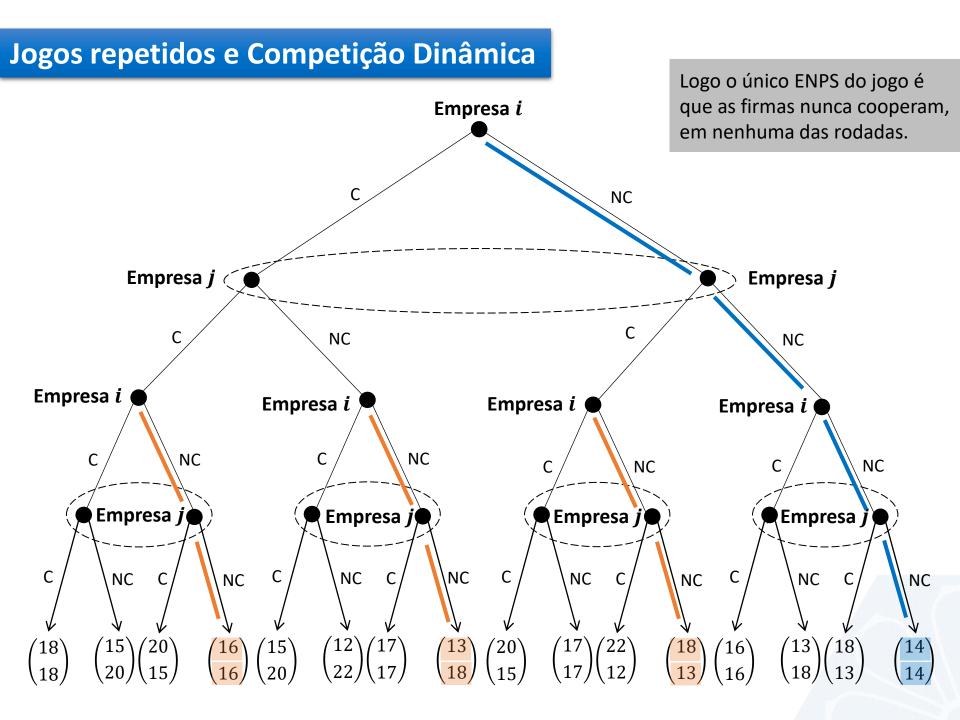


- Uma forma mais realista de reportar a situação de concorrência entre as duas empresas seria assumir que o jogo se repete, ou seja, que *as duas empresas jogam o mesmo jogo várias vezes*.
- De forma ilustrativa, *suponha que o jogo ocorra em duas rodadas*, em cada uma das rodadas as empresas jogam um jogo simultâneo, na rodada seguinte ambas conhecem o que aconteceu na primeira rodada, mas iniciam mais um jogo simultâneo.
- Os payoffs depois de duas rodadas são simplesmente as somas dos payoffs do jogo na forma simultânea.











- Esse resultado é válido para qualquer jogo simultâneo que se repete um número finito de vezes.
 - Ou seja, mesmo que o jogo fosse repetido por 100 vezes, se analisássemos por indução retroativa, chegaríamos a conclusão de que {Não Coopera; Não Coopera} seria o equilíbrio na 100º rodada, e esse equilíbrio seria trazido para a 99º rodada, e assim por diante até a primeira rodada.
 - A lógica desse resultado está no fato de que, se a empresa i por exemplo, sabe que essa é a última vez em que o jogo será jogado, ela pode querer furar o acordo, e tentar obter um lucro de 11 milhões na última rodada. Porém se a empresa j sabe que a empresa i pretende furar o acordo na 100º rodada, então sua melhor resposta seria furar o acordo na 99º rodada, e assim por diante, até a primeira rodada.



- Esse resultado (de que um jogo simultâneo repetido finitas vezes tem o mesmo resultado do jogo simultâneo jogado apenas uma vez), será válido apenas dentro das seguintes restrições:
 - nenhum jogador pode assumir um compromisso formal de cooperação antes ou durante o jogo;
 - o jogo é de informação completa (todos os payoffs são conhecidos), e;
 - o o final do jogo é conhecido.



- Em particular, flexibilizar a terceira restrição (de que o final do jogo é conhecido) produz um resultado completamente diferente.
- Vamos supor que as empresas não esperam que o jogo acabe, ou simplesmente acreditem que o jogo será jogado repetidas vezes por tempo indefinido, e que as empresas adotem uma estratégia de "olho por olho, dente por dente" ou tit-fortat:
 - \circ Se um dos jogadores fura o acordo (não coopera) no período t, o outro jogador irá retaliar (não cooperar) a partir de t+1.
 - $_{\circ}$ Vamos assumir também que os jogadores valorizam ganhos no presente, mais do que valorizam ganhos no futuro, e essas preferências são representadas por um fator de desconto δ , tal que $0<\delta<1$, a cada rodada do jogo.

Empresa j

Empresa i	Coopera	Não coopera
Coopera	(9, 9)	(6, 11)
Não coopera	(11, 6)	(7, 7)

- Nesse caso, uma empresa permanece em conluio se, e somente se, o ganho da cooperação supera o ganho de desviar do acordo.
- Ou seja, se a empresa coopera, irá receber a cada período 9 milhões em lucro, logo, o valor presente da cooperação será dado por:

$$VP_C = 9 + 9\delta + 9\delta^2 + \dots + 9\delta^n$$

$$VP_C = 9 + 9(\delta + \delta^2 + \dots + \delta^n)$$

$$VP_C = 9 + 9\left(\frac{\delta}{1 - \delta}\right) = \frac{9}{1 - \delta}$$

Note que, $(\delta + \delta^2 + \dots + \delta^n)$ é a soma de uma PG infinita, que é dada por $S = \frac{a_1}{1-q}$, em que a_1 é o primeiro elemento da PG, nesse caso, δ , e q é a razão da PG, nesse caso também igual a δ .



Empresa j

Empresa i	Coopera	Não coopera
Coopera	(9, 9)	(6, 11)
Não coopera	(11, 6)	(7, 7)

- Por sua vez, se *a empresa decide desviar*, ou não cooperar, ganhará 11 milhões na rodada em que desvia, e 7 milhões em todas as rodadas seguintes, para as quais as empresas voltam para um jogo não cooperativo.
- Logo, o valor presente de não cooperar será:

$$VP_{NC} = 11 + 7(\delta + \delta^2 + \dots + \delta^n) = 11 + 7\left(\frac{\delta}{1 - \delta}\right)$$

$$VP_{NC} = \frac{11 - 4\delta}{1 - \delta}$$



• Sendo assim, a empresa irá furar o acordo se, e somente se, $VP_{NC} \ge VP_C$:

$$\frac{11 - 4\delta}{1 - \delta} \ge \frac{9}{1 - \delta}$$

$$11 - 4\delta \ge 9$$

$$\delta \le 0.5$$

- Logo, se a taxa de desconto for baixa $\delta \leq 0.5$, então os valores futuros serão trazidos para o presente em proporções muito pequenas.
- Por exemplo, supondo $\delta=0.1$, o valor presente da não cooperação e cooperação seriam:

$$VP_{NC} = 11 + 0.7 + 0.07 + 0.007 + \cdots$$

 $VP_{C} = 9 + 0.9 + 0.09 + 0.009 + \cdots$

o Ou seja, esse jogador valoriza pouco os fluxos futuros, e valoriza muito os fluxos presentes, isso faz com que ganhar 11 no presente seja mais importante do que manter 9 por um período indefinido.







Av. Prefeito Lothário Meissner, nº 632 – Setor de Ciências Sociais | UFPR



www.nedur.ufpr.br



nedur.ufpr@gmail.com