Jogos estritamente competitivos e estratégias mistas

Profª. Kênia Barreiro de Souza

Professora do Departamento de Economia e do Programa de Pós-Graduação em Desenvolvimento Econômico da Universidade Federal do Paraná e Pesquisadora do Núcleo de Estudos em Desenvolvimento Urbano e Regional (NEDUR)

Janeiro/2021

Referências

FIANI, R. (2015) Teoria dos Jogos. 4ª edição. Editora Campus. (Capítulo 5)

MUNOZ-GARCIA, F. (2021). Strictly Competitive Games. Disponível em: https://felixmunozgarcia.files.wordpress.com/2017/08/slides_8.pdf. Acesso em: Fevereiro de 2021.

APT, Krzysztof R. Strictly Competitive Games. Disponível em: https://homepages.cwi.nl/~apt/stra/ch6.pdf. Acesso em: Fevereiro de 2021.

Jogos estritamente competitivos

Jogos estritamente competitivos

- Dizemos que um jogo é estritamente competitivo quando ***existe um conflito irreconciliável entre os jogadores***.
  - Isso ocorrerá sempre que as recompensas dos jogadores estão relacionadas de forma inversa, ou seja, quando um jogador ganha o outro necessariamente perde.
- Formalmente, temos que: dois jogadores estão em um jogo estritamente competitivo, se, para cada dois perfis de estratégias s e s', temos:

$$u_1(s) \geq u_1(s') \; e \; u_2(s) \leq u_2(s')$$

  - Ou seja, se o resultado (utilidade) de um determinado perfil de estratégias s para o jogador 1 for melhor do que o resultado para outro perfil s', então necessariamente, o resultado de s é pior para o jogador 2 do que o resultado de s'.
  - Uma consequência da definição é que, se $u_1(s) = u_1(s')$, necessariamente $u_2(s) = u_2(s')$

Jogos de soma zero

- Na maior parte desses jogos, podemos representar os payoffs de forma exatamente inversa, em que $u_1(s) = -u_2(s)$, ou seja, a recompensa de do jogador 1 para um dado perfil de estratégias s é igual ao inverso da recompensa do jogador 2 para o mesmo perfil de estratégias.
- Nesse caso, dizemos tratar-se de um **jogo de soma zero**.
  - A própria definição dos jogos de soma zero deixa claro que o conflito entre os dois jogadores é irreconciliável, não há como fazer ambos "ganharem" ao mesmo tempo, e por consequência, o jogo será competitivo.

Jogos de soma constante

- Um dos casos específicos de jogos estritamente dominantes são os **jogos de soma constante**. Formalmente, segundo Baron (2013), isso implica que, se o payoff para o jogador linha, em um perfil de estratégias s, se o payoff do jogador 1 for u_1, o payoff do jogador 2 será:

$$u_2(s) = C - u_1(s)$$

  - Logo, o somatório de todos os perfis de estratégias do jogo deverá ser igual a constante C.
  - Por conseguinte, o ganho de um jogador implica necessariamente em perda para o outro jogador.

- Observe que quando $C = 0$, ***o jogo é de soma zero, i.e., um caso específico da categoria de jogos de soma constante***.

- Vale ressaltar, que todos os jogos de soma constante são estritamente competitivos, porém, podem ocorrer jogos estritamente competitivos [que obedecem a regra $u_1(s) > u_1(s') \; e \; u_2(s) < u_2(s')$], mas que não sejam de soma constante.

Jogos estritamente competitivos

- Uma das formas de resolver um jogo estritamente competitivo se dá por meio de uma ***estratégia conservadora***, também chamada de ***minmax***, ou ***maxmin***.
  - Vale ressaltar que esse tipo de estratégias pode ser utilizado em outros jogos, não competitivos.
- Nessa estratégia, a ideia é maximizar a obtenção de um determinado nível mínimo de ganho.
  - Para cada estratégia o jogador verifica o pior resultado possível, entre os piores resultados, o jogador escolhe o maior valor.

Jogos estritamente competitivos

- Vejamos um exemplo (Exame Anpec, 2012, questão 8.2.)
- Duas empresas A e B vendem produtos concorrentes e estão avaliando canais alternativos para divulgação de seus produtos. A empresa A avaliou três canais alternativos, enquanto a empresa B avaliou 4 canais.
- O quadro abaixo resume os percentuais de valor de mercado ganhos (valores positivos) ou perdidos (valores negativos) pela firma A.

	B(1)	**B(2)**	**B(3)**	**B(4)**
A(1)	7	-3	8	-4
A(2)	5	4	5	7
A(3)	-3	3	-10	4

Jogos estritamente competitivos

- Como os payoffs representam os ganhos ou perdas da empresa A, podemos interpretar que quanto maior esse valor, melhor para a empresa A e, portanto, pior para a empresa B.
- O jogo claramente é um ***jogo de soma zero***, no qual o aumento da participação de uma das empresas nesse mercado implica a redução da participação da empresa concorrente.
- Sendo assim, para facilitar a visualização dos resultados, podemos simplesmente repetir o inverso de cada payoff para a empresa da coluna:

	B(1)	**B(2)**	**B(3)**	**B(4)**
A(1)	7, -7	-3, 3	8, -8	-4, 4
A(2)	5, -5	4, -4	5, -5	7, -7
A(3)	-3, 3	3, -3	-10, 10	4, -4

Jogos estritamente competitivos

- ***Qual seria a estratégia conservadora para cada uma das empresas, ou seja, a estratégia que reduz as perdas potenciais?***

Para a empresa A:

	B(1)	B(2)	B(3)	B(4)
A(1)	7, -7	-3, 3	8, -8	-4, 4
A(2)	5, -5	4, -4	5, -5	7, -7
A(3)	-3, 3	3, -3	-10, 10	4, -4

A empresa A tem como estratégia MaxMin jogar A(2), que garante o melhor entre os piores resultados

Jogos estritamente competitivos

- ***Qual seria a estratégia conservadora para cada uma das empresas, ou seja, a estratégia que reduz as perdas potenciais?***

Para a empresa B:

	B(1)	B(2)	B(3)	B(4)
A(1)	7, -7	-3, 3	8, -8	-4, 4
A(2)	5, -5	4, -4	5, -5	7, -7
A(3)	-3, 3	3, -3	-10, 10	4, -4

A empresa B tem como estratégia MaxMin jogar B(2), que garante o melhor entre os piores resultados

Jogos estritamente competitivos

- ***Qual seria a estratégia conservadora para cada uma das empresas, ou seja, a estratégia que reduz as perdas potenciais?***

Equilíbrio Maxmin:

	B(1)	B(2)	B(3)	B(4)	Pior resultado:
A(1)	7, -7	-3, 3	8, -8	-4, 4	-4
A(2)	5, -5	4, -4	5, -5	7, -7	4
A(3)	-3, 3	3, -3	-10, 10	4, -4	-10
Pior resultado:	-7	-4	-8	-7	

No equilíbrio MaxMin, a empresa A joga 2 e a empresa B joga 2

Jogos estritamente competitivos

- Repare que, enquanto para a empresa A podemos dizer que sua estratégia é maximizar os mínimos, olhando os payoffs da empresa A, a empresa B, está minimizando os máximos (de A). Por isso, esse equilíbrio pode ser chamado tanto de maxmin quanto de minimax.
- Ademais, como o perfil escolhido por ambas as empresa é o mesmo [A(2);B(2)], esse equilíbrio também conhecido como **ponto de sela**.
  - A boa notícia é que ***em jogos estritamente competitivos com dois jogadores, o equilíbrio maxmin é sempre um equilíbrio de Nash*** (lembrando que a estratégia maxmin ou minimax pode ser usada em outros tipos de jogos, porém se o jogo não for competitivo, nem sempre a solução maxmin é um equilíbrio de Nash).

Jogos estritamente competitivos

Qual é o equilíbrio de Nash do Jogo?

	B(1)	B(2)	B(3)	B(4)
A(1)	7, -7	-3, 3	8, -8	-4, 4
A(2)	5, -5	4, -4	5, -5	7, -7
A(3)	-3, 3	3, -3	-10, 10	4, -4

O perfil de estratégias {A(2),B(2)} também é o Equilíbrio de Nash do jogo

Estratégia MaxMin

- Podemos utilizar a estratégia Maxmin também para solucionar outros jogos, que não sejam estritamente competitivos.
- Vejamos um exemplo:
  - Duas empresas operam no mercado de iogurtes, podendo optar entre produzir um iogurte de alta qualidade (A) ou um iogurte de baixa qualidade (B). As escolhas das firmas são simultâneas (Anpec, 2-12, q. 9). Os lucros resultantes de cada estratégia encontram-se representados na matriz de payoff a seguir:

	Empresa 2		
Empresa 1	**Baixa**	**Alta**	Mínimo para 1
Baixa	-10, -25	600, 300	-10
Alta	90, 500	40, 40	40
Mínimo para 2	-25	40	

Estratégia MaxMin

- Observe que o equilíbrio MaxMin não é igual ao equilíbrio de Nash

		Empresa 2	
Empresa 1		Baixa	Alta
	Baixa	-10, -25	600, 300
	Alta	90, 500	40, 40

Jogos estritamente competitivos

- Também haverá situações em que não há uma solução maxmin para um jogo competitivo, o jogo das moedas é um dos casos:

Jogador 1	Jogador 2: Cara	Jogador 2: Coroa	Mínimo para 1
Cara	1,-1	-1,1	-1
Coroa	-1,1	1,-1	-1
Mínimo para 2	-1	-1	

- Nesse caso, tanto o jogador 1 quanto o jogador 2 são indiferentes entre cara e coroa. Portanto, não existe equilíbrio de estratégias puras maxmin para esse jogo.

Estratégias mistas

Estratégias Mistas

- Vamos relembrar o jogo das moedas:

Jogador 1	Jogador 2: Cara (q)	Jogador 2: Coroa $(1 - q)$
Cara (p)	1,-1	-1,1
Coroa $(1 - p)$	-1,1	1,-1

- Nesse caso, é bastante intuitivo que cada um dos dois jogadores gostaria de ***surpreender o outro jogador***. Dito de outra forma, se um dos jogadores "deixa de surpreender", torna-se previsível e com isso perde o jogo.
  - Por exemplo, se o Jogador 1 joga sempre Cara, o Jogador 2, atento a essa situação irá preferir jogar sempre Coroa, e, portanto, irá ganhar sempre.

Estratégias Mistas

- Logo, ***a melhor estratégia para ambos*** os jogadores ***é jogar*** cara e coroa ***de forma aleatória***, fazendo com que o adversário nunca consiga prever o movimento. Essa é exatamente a definição de **estratégias mistas**:

> ***Uma estratégia mista para um jogador i, corresponde a estratégia de jogar aleatoriamente todas as estratégias disponíveis ao jogador com probabilidades pré-definidas.***

Estratégias Mistas

- Intuitivamente, podemos concluir que o equilíbrio de estratégias mistas de cada jogador no jogo das moedas seria ***jogar cara ou coroa com probabilidade 1/2***.
  - Essa opção neutraliza os efeitos da estratégia escolhida pelo outro jogador, ou seja, faz com que o resultado esperado do jogo seja o mesmo, independentemente do que o outro jogador faça.
- Nem sempre essa probabilidade será tão óbvia!
  - Por isso, precisamos formalizar esse resultado atribuindo probabilidades a cada jogada.

Estratégias Mistas

- Vamos supor que o Jogador 1 joga Cara com probabilidade p e coroa com probabilidade $(1 - p)$. Naturalmente, as probabilidades devem sempre somar um para o conjunto de estratégias de cada jogador. De forma análoga, o Jogador 2 joga Cara com probabilidade q e Coroa com probabilidade $(1 - q)$, conforme ilustra o quadro abaixo:

	Jogador 2	
Jogador 1	**Cara** $(\boldsymbol{q})$	**Coroa** $(\boldsymbol{1 - q})$
Cara $(\boldsymbol{p})$	1,-1	-1,1
Coroa $(\boldsymbol{1 - p})$	-1,1	1,-1

Qual o retorno esperado de cada uma das estratégias?

Em equilíbrio cada um dos jogadores escolha cara ou coroa com probabilidade de 0,5 ou 50%.

Estratégias Mistas

Podemos ainda representar o equilíbrio de estratégias mistas por meio da ***curva de melhores respostas*** dos jogadores 1 e 2 de forma gráfica. Para tanto, precisamos analisar todas as possibilidades de estratégias mistas no jogo, e as melhores respostas para cada uma dessas estratégias. Para o Jogador 1:

	Jogador 2	
Jogador 1	**Cara (q)**	**Coroa $(1 - q)$**
Cara (p)	1,-1	-1,1
Coroa $(1 - p)$	-1,1	1,-1

i. Se o jogador 2 escolha $q = 1$, ou seja, sempre joga Cara, a melhor resposta do jogador 1 seria jogar Cara, ou seja, definir $p = 1$ (ele sempre ganha nesse caso).

ii. Se o jogador 2 escolher exatamente $q = \frac{1}{2}$, o jogador 1 será indiferente entre jogar cara ou coroa, logo, sua melhor resposta é definir qualquer valor $0 \leq p \leq 1$.

iii. Se o jogador 2 escolher qualquer ½ $< q < 1$, ainda assim sabemos que a probabilidade de jogar Cara é maior do que a probabilidade de jogar Coroa, logo, a melhor resposta do Jogador 1 continua a ser jogar apenas Cara, tal que $p = 1$.

iv. Se o jogador 2 escolher $0 \leq q < \frac{1}{2}$, ou seja, se ele joga Coroa com maior probabilidade do que joga Cara, a melhor resposta para o jogador 1 será jogar Coroa, ou seja, definir $p = 0$.

Estratégias Mistas

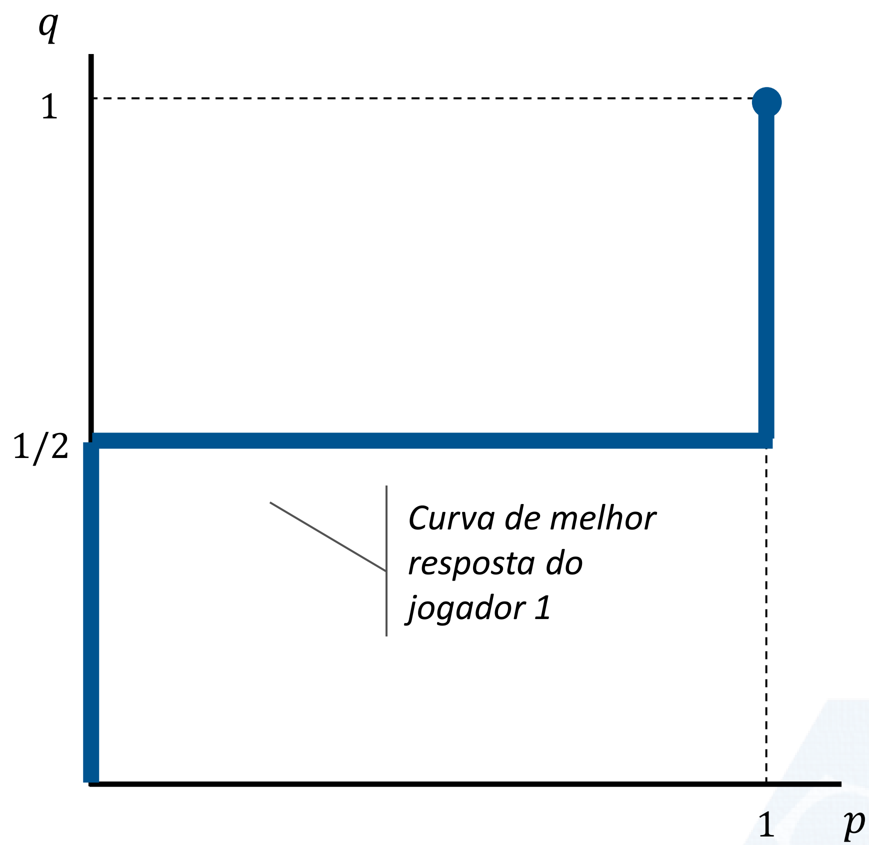
- Assim, a função de melhor resposta do jogador 1 pode ser representada da seguinte forma:

i. Se o jogador 2 escolha $q = 1, p = 1$.

ii. Se o jogador 2 escolher qualquer $½ < q < 1, p = 1$.

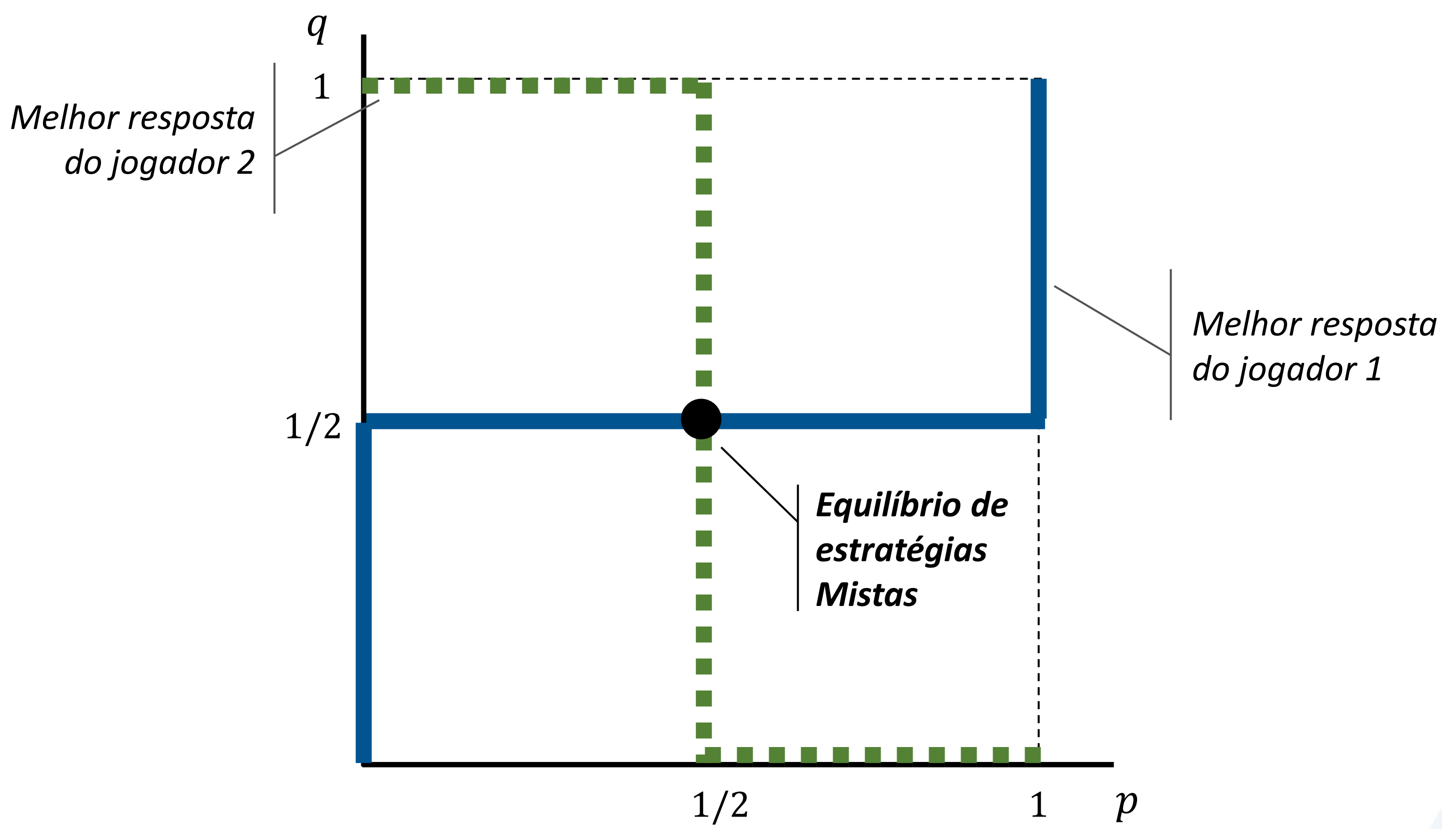
iii. Se o jogador 2 escolher exatamente $q = \frac{1}{2}$, qualquer valor $0 \leq p \leq 1$.

iv. Se o jogador 2 escolher $0 \leq q < \frac{1}{2}$, $p = 0$.



Estratégias Mistas

- Para o Jogador 2, as melhores respostas são simétricas. Podemos representar as duas funções concomitantemente:



Estratégias Mistas

- Vejamos mais um exemplo (Fiani, 2015, p. 214).
  - Em uma cobrança de pênaltis, o batedor tem duas estratégias possíveis, jogar para o lado direito e jogar para o lado esquerdo, enquanto o goleiro pode antecipar o movimento do batedor movendo-se para o lado direito ou para o lado esquerdo. Se ambos se movem para o mesmo lado, as chances de gol são baixas, porém se ambos se movem para lados diferentes, as chances serão altas.
  - Suponha que, com base no histórico de determinado batedor e determinado goleiro sejam calculadas as seguintes ***probabilidades de gol***:

	Goleiro	
Batedor	Direta	Esquerda
Direita	30%	90%
Esquerda	80%	40%

Estratégias Mistas

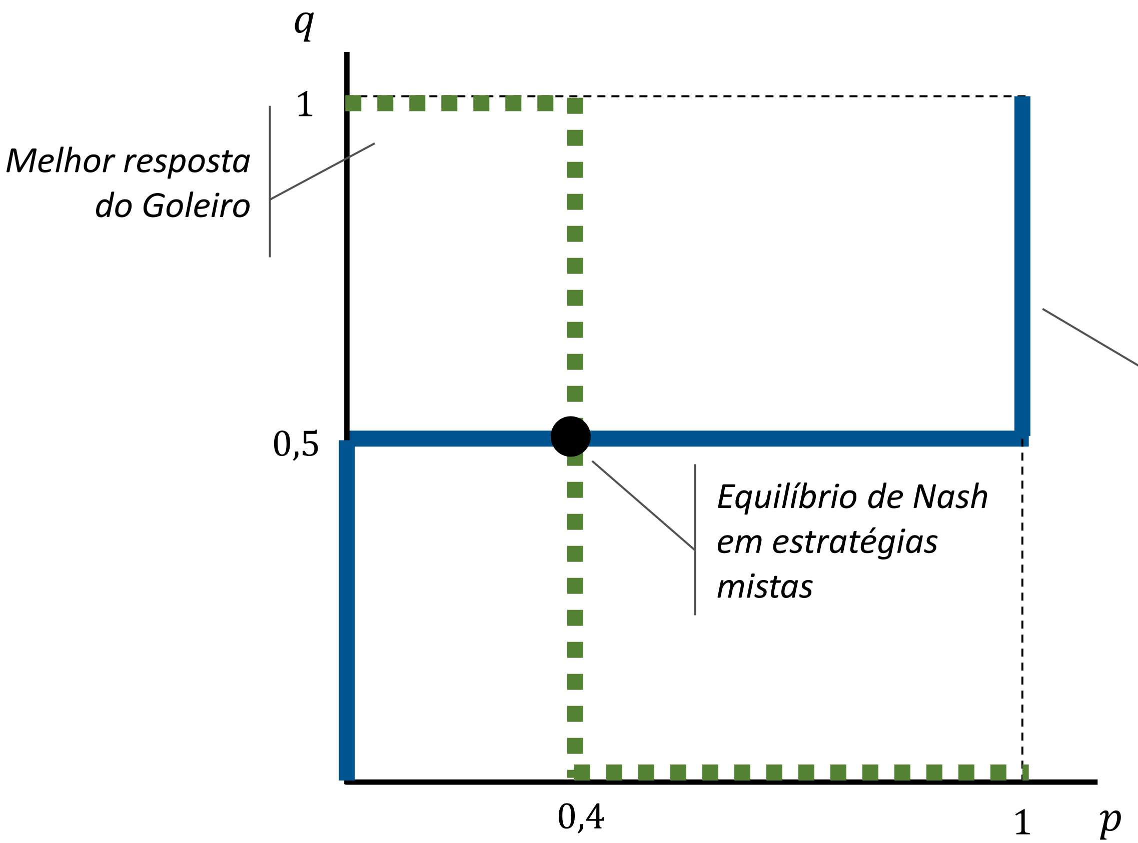
- Se buscarmos a solução <u>maxmin</u> ou <u>equilíbrio de Nash</u> para o jogo, veremos que ***não há nenhum equilíbrio em estratégias puras***, porém, agora podemos analisar qual seria a melhor resposta dos jogadores em estratégias mistas.
- Para facilitar a compreensão, ***podemos representar novamente o mesmo jogo com os payoffs completos*** e as probabilidades de cada jogada, em que a probabilidade de não ocorrer gol é o payoff do goleiro:

	Goleiro	
Batedor	Direta (q)	Esquerda $(1-q)$
Direita (p)	30%, 70%	90%, 10%
Esquerda $(1-p)$	80%, 20%	40%, 60%

Em equilíbrio, o Batedor joga Direita com probabilidade 0,5 e o Goleira vai para a direita com probabilidade 0,4

Estratégias Mistas

- O equilíbrio do jogo poderia ser representado da seguinte forma:



Estratégias Mistas

- Embora as estratégias mistas sejam uma forma de solucionar jogos estritamente competitivos, elas não estão limitadas a esses jogos.
- ***Mesmo jogos que não são estritamente competitivos podem ter uma solução em estratégias mistas***, podendo inclusive admitir uma ou mais soluções em estratégias puras.
- Vejamos um exemplo em que isso ocorre, apresentado por Fiani (2015, p. 207).
  - Durante a guerra fria, Estados Unidos e União Soviética permaneceram por anos em conflito, no qual a ameaça era a principal que sustentava o jogo. Ambas as nações não tinham a intensão de entrar em um conflito armado, pois as perdas seriam elevadas.

	União Soviética	
Estados Unidos	Ameaça	Não ameaça
Ameaça	-100, -100	10,-10
Não Ameaça	-10,10	0,0

Estratégias Mistas

- Primeiro vamos verificar o equilíbrio de Nash do Jogo:

	União Soviética	
Estados Unidos	Ameaça	Não ameaça
Ameaça	-100, -100	10,-10
Não Ameaça	-10,10	0,0

O jogo possui dois equilíbrios de Nash em estratégias puras

Estratégias Mistas

- E em estratégias mistas?

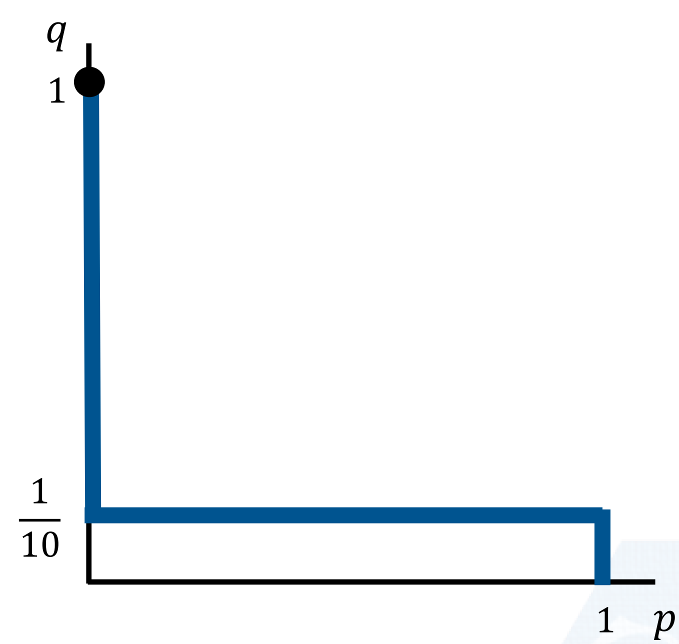
	União Soviética	
Estados Unidos	Ameaça (q)	Não ameaça $(1-q)$
Ameaça (p)	-100, -100	10,-10
Não Ameaça $(1-p)$	-10,10	0,0

Em equilíbrio, cada um dos países ameaça com 10% de probabilidade

Estratégias Mistas

	União Soviética	
Estados Unidos	Ameaça (q)	Não ameaça $(1-q)$
Ameaça (p)	-100, -100	10,-10
Não Ameaça $(1-p)$	-10,10	0,0

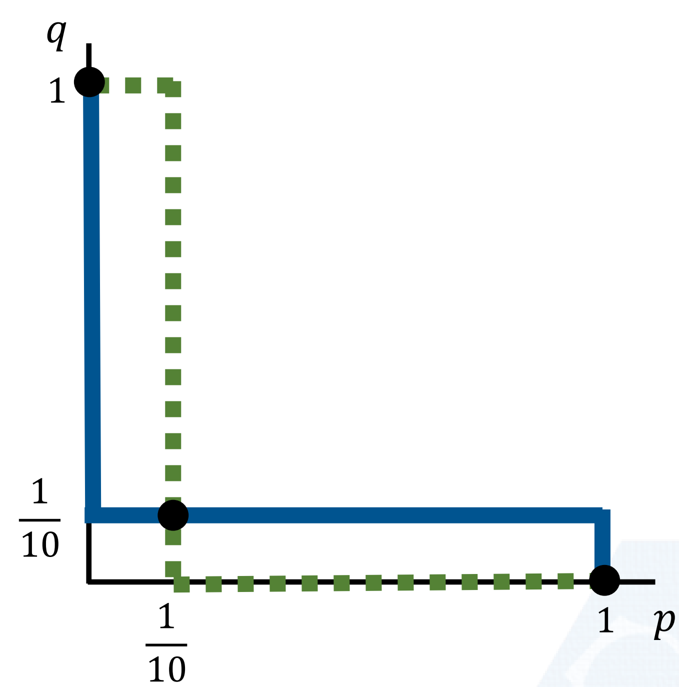
- Ou seja, para os EUA:
  - Se $q = 1$ (união soviética ameaça), a melhor resposta é jogar "Não ameaça", i.e, $p = 0$;
  - Se $1/10 < q < 1$, a probabilidade de ameça ainda é forte, e a melhor resposta é não ameaçar, $p = 0$;
  - Se $q = 1/10$, o país será indiferente entre qualquer uma de suas estratégias;
  - Se $0 \leq q < 1/10$, a chance de ameaça é pequena, e portanto, a melhor resposta dos Estados Unidos é ameaçar, jogando $p = 1$



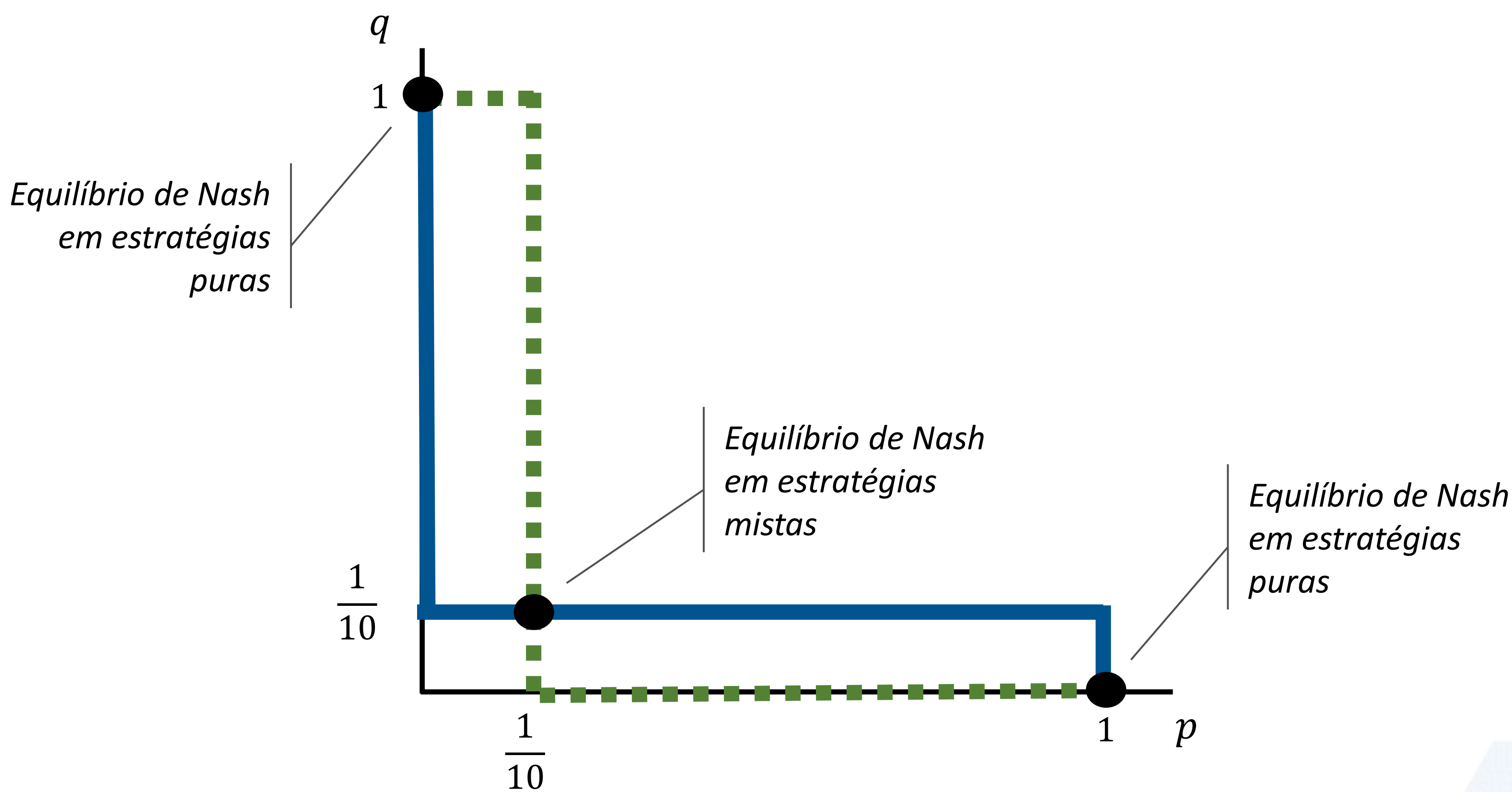
Estratégias Mistas

	União Soviética	
Estados Unidos	Ameaça (q)	Não ameaça $(1-q)$
Ameaça (p)	-100, -100	10,-10
Não Ameaça $(1-p)$	-10,10	0,0

- Por sua vez, para a União Soviética:
  - Se $p = 1$ (EUA ameaça), a melhor resposta é jogar "Não ameaça", i.e, $q = 0$;
  - Se $1/10 < p < 1$, a probabilidade de ameça ainda é forte, e a melhor resposta é não ameaçar, $q = 0$;
  - Se $p = 1/10$, o país será indiferente entre qualquer uma de suas estratégias;
  - Se $0 \leq p < 1/10$, a chance de ameaça é pequena, e portanto, a melhor resposta da União Soviética é ameaçar, jogando $q = 1$



Estratégias Mistas



Estratégias Mistas

- Para finalizar, outro exemplo de jogo não competitivo, com dois equilíbrios de Nash, é a guerra dos sexos. Podemos agora solucionar o jogo por estratégias mistas. Assumindo que o Jogador 1 joga cinema com probabilidade p e Netflix com probabilidade $(1-p)$, e que o jogador 2 joga cinema com probabilidade q e Netflix com probabilidade $(1-q)$, podemos reescrever a matriz de payoffs da seguinte forn

	Jogador 2	
Jogador 1	Cinema (q)	Netflix $(1-q)$
Cinema (p)	2,1	0,0
Netflix $(1-p)$	0,0	1,2

Em equilíbrio, o Jogador 1 joga Cinema com probabilidade 2/3 e o Jogador 2, joga cinema com probabilidade 1/3

Próxima aula...

Jogos Dinâmicos

NEDUR

Núcleo de Estudos em Desenvolvimento Urbano e Regional

Universidade Federal do Paraná

Av. Prefeito Lothário Meissner, nº 632 – Setor de Ciências Sociais | UFPR

www.nedur.ufpr.br

nedur.ufpr@gmail.com