NEDUR
Núcleo de Estudos em Desenvolvimento Urbano e Regional
Universidade Federal do Paraná

Equilíbrio de Nash em Estratégias Contínuas

Profª. Kênia Barreiro de Souza

Professora do Departamento de Economia e do Programa de Pós-Graduação em Desenvolvimento Econômico da Universidade Federal do Paraná e Pesquisadora do Núcleo de Estudos em Desenvolvimento Urbano e Regional (NEDUR)

Janeiro/2021

Referências

FIANI, R. (2015) Teoria dos Jogos. 4ª edição. Editora Campus. (Capítulo 4)

BIERMAN, H. S. FERNANDEZ, L. (2011) Teoria dos Jogos. Editora Pearson. (Capítulo 2)

Equilíbrio de Nash em Estratégias Contínuas

- Mesmo em jogos simultâneos, nem sempre vamos listar todas as estratégias possíveis, em alguns casos, existe um contínuo de estratégias que podem ser representadas por uma equação.
- Vamos começar com dois modelos de concorrência:
  - Cournot e Bertrand.

Modelo de Cournot

Modelo de Cournot

- Duas empresas produzem produtos homogêneos e devem **decidir simultaneamente a quantidade a ser produzida**, a quantidade por sua vez, poderá assumir qualquer valor e todos esses valores compõem o contínuo de estratégias disponíveis para cada empresa.

- Ambas as empresas têm por **objetivo maximizar o lucro** e se defrontam com a seguinte função de demanda (inversa) linear:

$$p(Q) = A - b\left(q_i + q_j\right)$$

  - Em que q_i é a quantidade produzida pela empresa i e $Q = q_1 + q_2$.

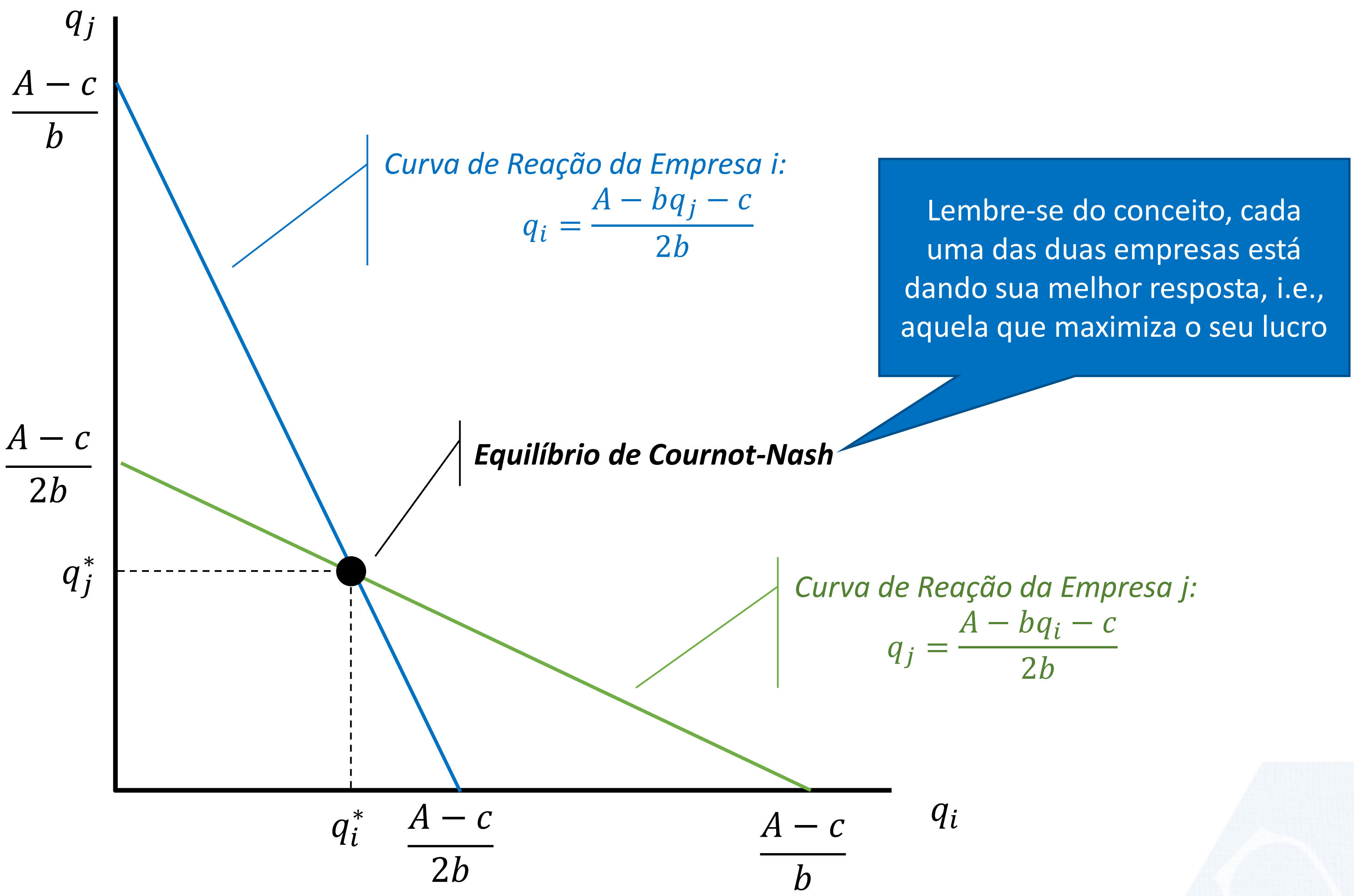
- A função custo de cada empresa é dada por:

$$C_i = cq_i$$

  - Em que c é constante e estritamente maior que zero.

Vamos resolver o problema!

O modelo de Cournot



Modelo de Cournot

- Vejamos o exemplo numérico proposto por Fiani (2015, p. 126). Suponha que a curva de demanda inversa de mercado é dada por:

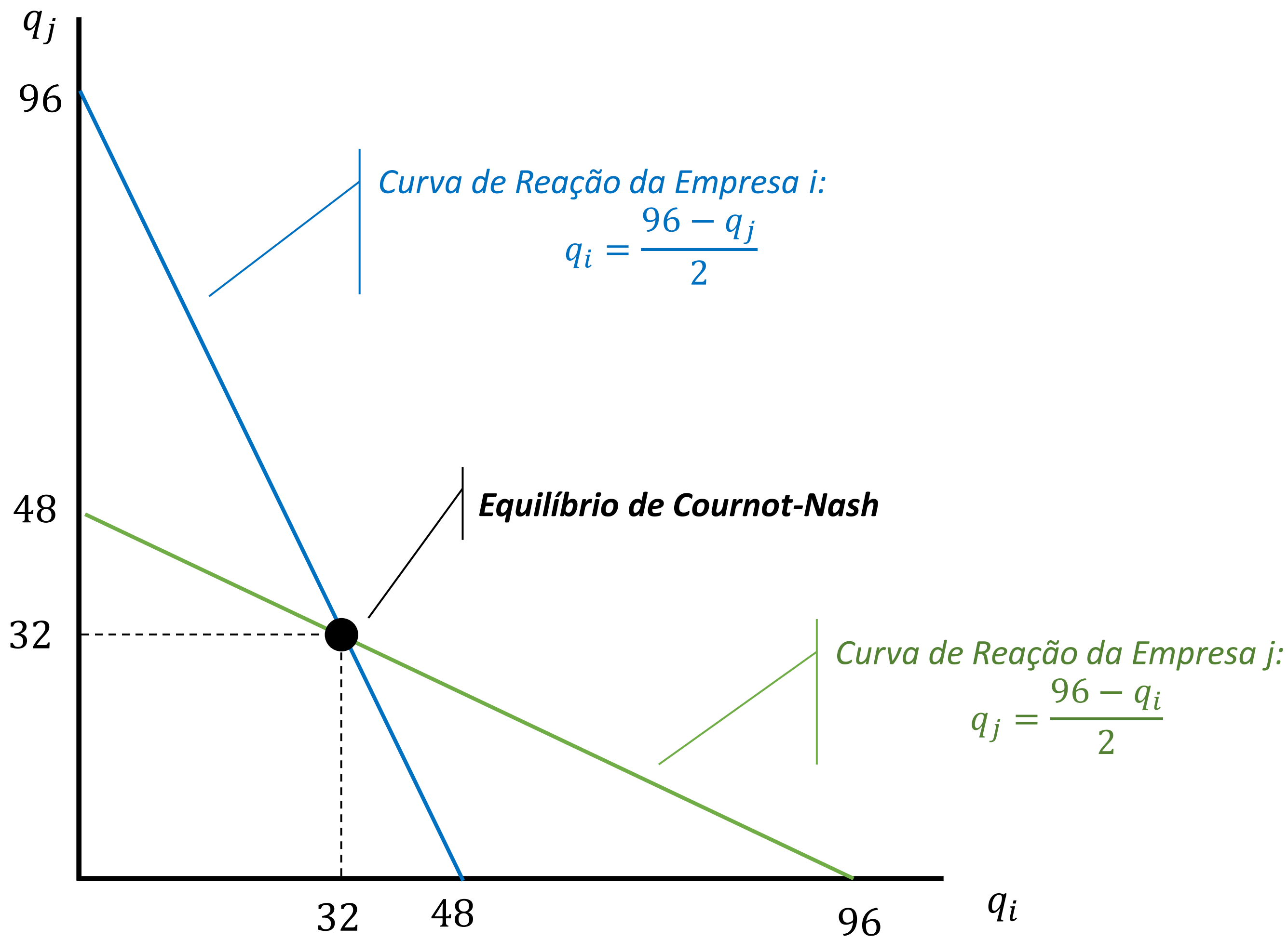
$$p = 100 - q_i - q_j$$

- E as funções de custo de cada empresa i dadas por:

$$C_i = 4q_i$$

Vamos resolver o problema!

Modelo de Cournot



Modelo de Cournot

- Esse resultado em que cada uma das empresas produz 32 unidades e o preço de equilíbrio é 36 constitui o equilíbrio de Cournot-Nash, conforme indicado na figura anterior. Vale ressaltar, que **o conceito de equilíbrio de Nash** impõe que os jogadores joguem suas melhores estratégias, porém **não impõe que os jogadores encontrem o melhor resultado possível no jogo**.

- Esse jogo ilustra o fato de que, a falta de coordenação impede que os jogadores atinjam o melhor resultado para ambos.

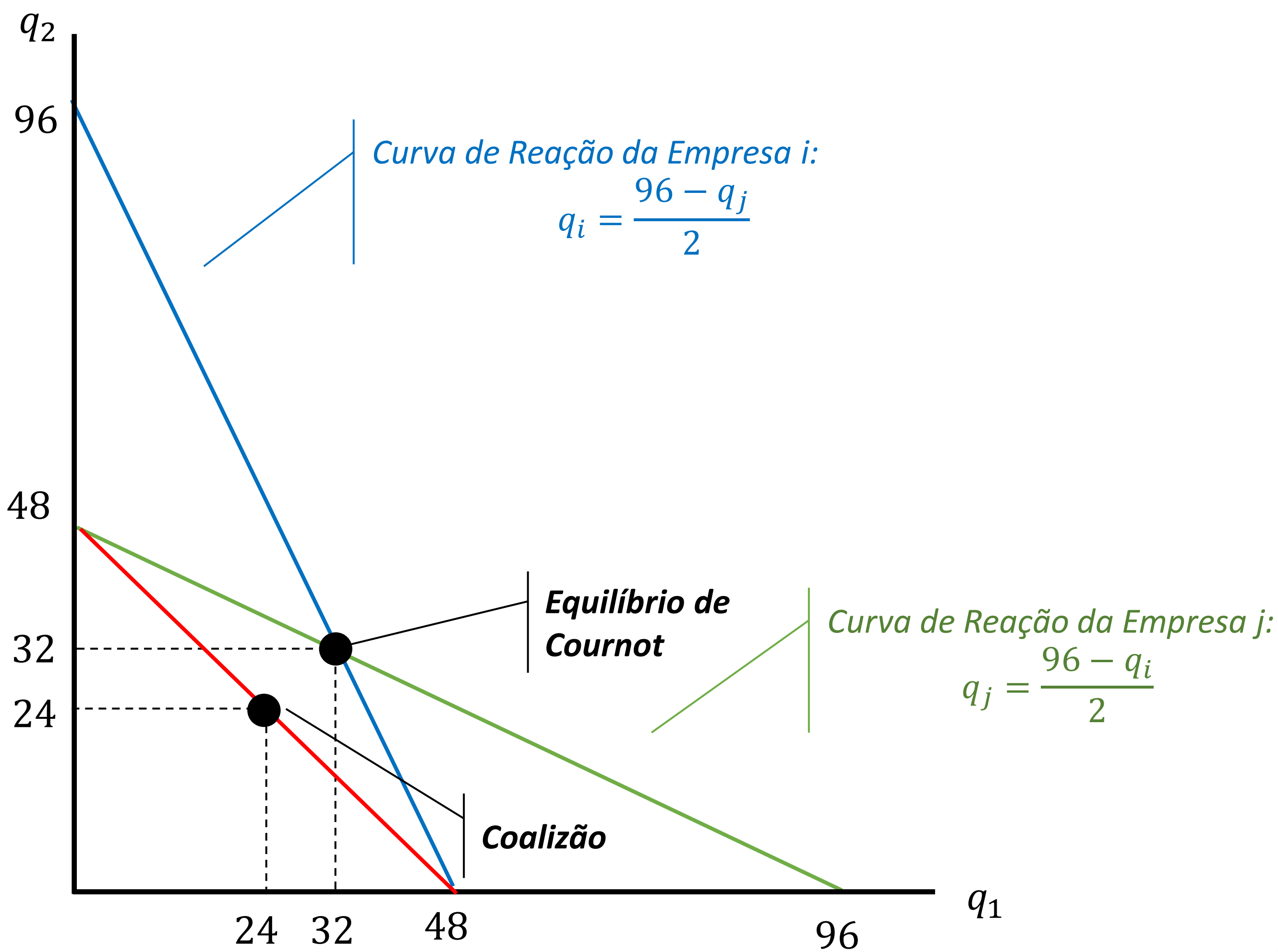
  - Nessa situação, ou seja, sempre que os jogadores não podem estabelecer compromissos garantidos, dizemos que o jogo é **não cooperativo**.

  - Por outro lado, se é possível estabelecer acordos com garantias efetivas, o jogo é **cooperativo**, e nesse caso isso ocorrerá se as empresas entrem em coalizão (ou seja, aturarem em cartel) e coordenarem as quantidades podemos ter um resultado bastante diferente.

- **Atuando em cartel**, a decisão passa a ser conjunta, e o problemas das firmas passa a ser maximizar o lucro total do cartel.

Vamos resolver o problema em um cartel!

Modelo de Cournot



Modelo de Cournot

Resultado	Cournot	Cartel
Quantidade	32	24
Preço	36	52
Lucro por empresa	1.024	1.152

- Conforme o esperado, quando as empresas entram em coalizão, a quantidade ofertada por empresa reduz, os preços aumentam e o lucro aumenta.
- Isso ocorre pois, ao invés de competirem via quantidades, as duas empresas nesse caso **"funcionam" como uma monopolista e atingem um resultado eficiente**, ou seja, **ótimo de Pareto** sob a perspectiva das duas empresas.
- ***Enquanto o equilíbrio de Nash seria "Pareto-Ineficiente" na perspectiva das empresas.***

Por que as empresas se mantêm em competição?

Modelo de Cournot

Resultado	Cournot	Cartel	Firma i fura o Cartel
Quantidade de i	32	24	36
Quantidade de j	32	24	24
Preço	36	52	40
Lucro de i	1.024	1.152	1296
Lucro de j	1.024	1.152	964

Empresa *i*	**Empresa *j*** Coopera	Não coopera
Coopera	1.152, 1.152	864, 1.296
Não coopera	1.296, 864	1.024, 1.024

O equilíbrio de Nash do Jogo é {Não coopera, Não coopera}

Modelo de Cournot

- O modelo de Cournot pode ser estendido para o caso com n firmas.
- Nesse caso, podemos assumir que a função de demanda linear inversa desse mercado poder ser representada por:

$$p(q) = A - b\sum_{i=1}^{n} q_i$$

  - Em que $\sum_{i=1}^{n} q_i = q$, ou seja, q é a quantidade total produzida e vendida nesse mercado, com cada empresa produzindo q_i.

- Novamente, a função custo de cada empresa i pode ser representada por

$$C_i = cq_i$$

Vamos resolver o problema!

Modelo de Bertrand

Modelo de Bertrand

- O modelo de Bertrand também é conhecido como modelo de determinação simultânea de preços, e pode ser analisado em diversas circunstâncias.
- Veremos três possibilidades:
   i. produtos homogêneos, sem nenhuma restrição de capacidade produtiva;
   ii. produtos homogêneos, considerando que as empresas possuem restrições na quantidade total a ser produzida, e;
   iii. produtos diferenciados.

Bertrand com produtos homogêneos **sem restrição de capacidade produtiva**

Bertrand com produtos homogêneos sem restrição de capacidade

- Duas empresas, i e j, produtoras de bens homogêneos decidem simultaneamente os preços.
- Como os produtos são idênticos, podemos considerá-los ***substitutos perfeitos***, e por consequência, os preços determinam a demanda de cada firma.
- Assim, podemos observar três situações possíveis:
  i. se $p_i < p_j$, todos os consumidores compram da empresa i;
  ii. se $p_i = p_j$, as empresas dividem o mercado em participações idênticas, e;
  iii. se $p_i > p_j$, todos os consumidores compram da empresa j.
- Logo, o preço de mercado p será determinado pela empresa que jogar o menor nível de preços.

Bertrand com produtos homogêneos sem restrição de capacidade

- A demanda pode ser escrita genericamente como $q(p)$, ou seja, a quantidade demandada será função unicamente dos preços.
- Assim, assumindo que o custo de produção é constante e igual a c, ou seja, $C_i = cq_i$, as funções de recompensa dependem diretamente da decisão de preços e do lucro obtido para cada empresa i.
- Formalmente:

$$\pi_i = \begin{cases} (p_i - c)q \; se \; p_i < p_j \\ \dfrac{(p_i - c)q}{2} \; se \; p_i = p_j \\ 0 \; se \; p_i > p_j \end{cases}$$

Bertrand com produtos homogêneos sem restrição de capacidade

- Obviamente, nenhuma das duas empresas tem interesse em escolher qualquer $p_i < c$, o que acarretaria em prejuízo.
- Logo, ***a melhor resposta*** da empresa j para qualquer $p_i > c$ será estabelecer um preço p_j tal que $p_j = p_i - \varepsilon$, sendo ε um valor positivo e muito pequeno.
  - Ou seja, a melhor resposta da empresa j seria reduzir o preço de tal forma a ter todo o mercado, porém sem reduzir sua recompensa de forma significativa.
- Porém, nesse caso, a melhor resposta da empresa i seria jogar $p_i' = p_j - \varepsilon$, e assim por diante, de tal forma que ***só existe um par de preços estáveis que são melhor resposta ao mesmo tempo*** (e, portanto, constituem um equilíbrio de Nash), que ocorrerá apenas quando $p_i^* = p_j^* = c$.
- Esse resultado é conhecido como ***Paradoxo de Bertrand***, ao implicar que um duopólio com produtos homogêneos, sem restrições de capacidade produtiva e com determinação simultânea de preços tem o mesmo resultado de um mercado de concorrência perfeita: ***preço igual ao custo marginal de produção e lucro zero***.

Bertrand com produtos homogêneos sem restrição de capacidade

- Retomando a mesma função utilizada no exemplo de Cournot, ou seja, se assumirmos uma curva de demanda de mercado do tipo linear dada por:

$$q(p) = 100 - p$$

- E custos unitários constantes para qualquer quantidade, tal que:

$$C(q_i) = 4q_i$$

- A função lucro pode ser reescrita como:

$$\pi_i = \begin{cases} (p_i - 4)(100 - p_i) \; se \; p_i < p_j \\ \dfrac{(p_i - 4)(100 - p_i)}{2} \; se \; p_i = p_j \\ 0 \; se \; p_i > p_j \end{cases}$$

Lembrando, que definimos anteriormente que:

$$\pi_i = \begin{cases} (p_i - c)q \; se \; p_i < p_j \\ \dfrac{(p_i - c)q}{2} \; se \; p_i = p_j \\ 0 \; se \; p_i > p_j \end{cases}$$

Bertrand com produtos homogêneos sem restrição de capacidade

$$\pi_i = \begin{cases} (p_i - 4)(100 - p_i) \; se \; p_i < p_j \\ \dfrac{(p_i - 4)(100 - p_i)}{2} \; se \; p_i = p_j \\ 0 \; se \; p_i > p_j \end{cases}$$

- Conforme demonstrado anteriormente, o equilíbrio de Nash implica que no modelo de Bertrand, $p = p_i = p_j = c$, e, portanto, no exemplo $p = 4$, logo:

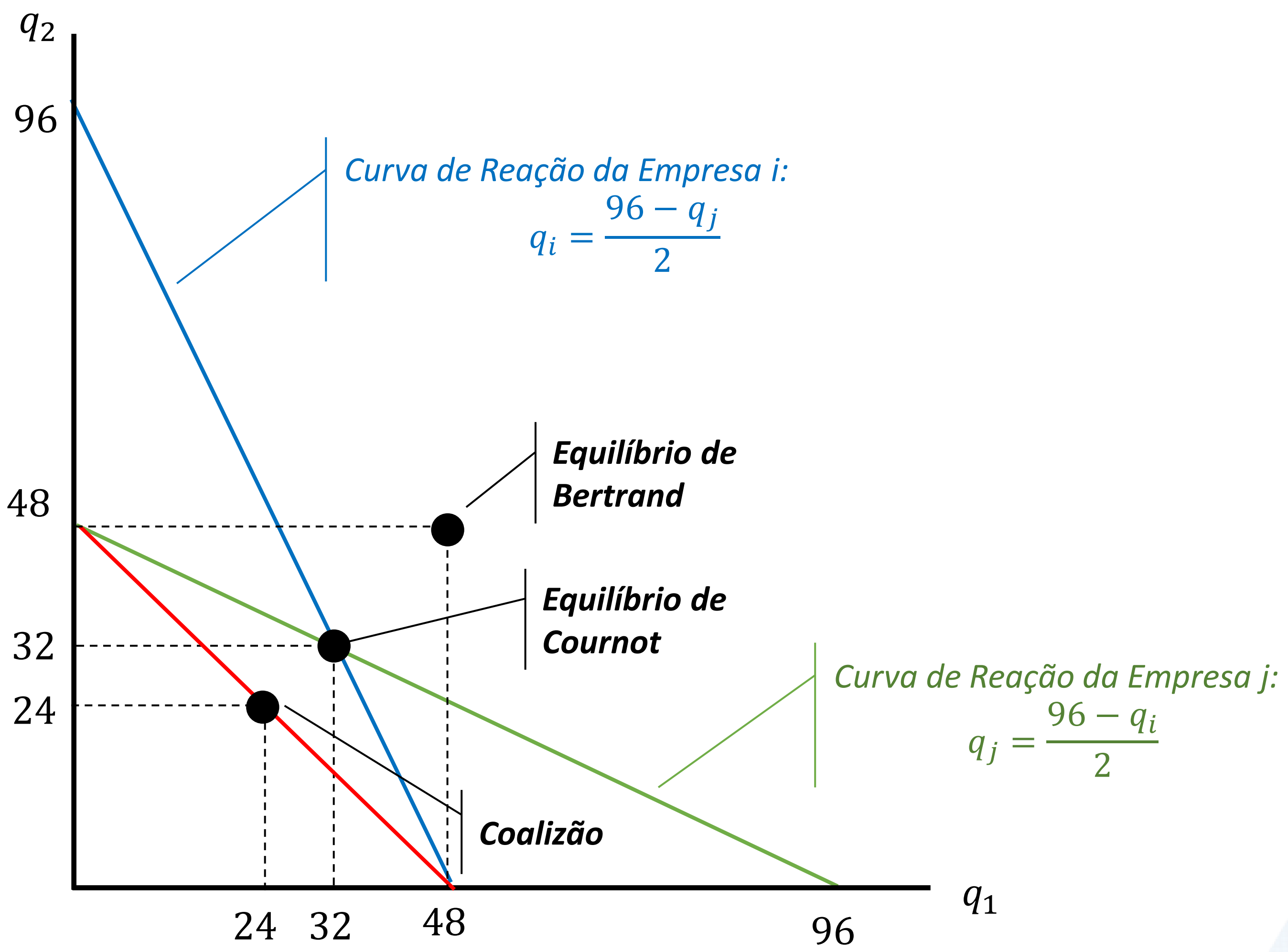
$$q = 100 - p = 96$$

$$q_1 = q_2 = 48$$

- Podemos comparar os três resultados possíveis:

	Cournot	Coalizão	Bertrand
Preço	36	52	4
Quantidade total ofertada	32	24	48
Lucro por empresa	1.024	1.152	0

Bertrand com produtos homogêneos sem restrição de capacidade



Bertrand com produtos homogêneos **com restrição de capacidade produtiva**

Bertrand com produtos homogêneos e restrição de capacidade

- No exemplo anterior, a estratégia de reduzir os preços para algum valor inferior ao preço da concorrente é incentivada pelo fato de que um preço menor garante toda a demanda.
  - No entanto, se houver qualquer restrição na capacidade produtiva poderá ocorrer que a empresa não consiga atender toda a demanda.
- Ainda considerando os demais dados do exemplo anterior, ***suponha que a capacidade produtiva das duas firmas seja de no máximo 60 unidades***.

Bertrand com produtos homogêneos e restrição de capacidade

- Se $p_i > p_j$, então a firma j atenderá o mercado e poderá ofertar no máximo 60 unidades, enquanto a firma i poderá ou não ter uma demanda residual.
  - Se $q = 100 - p_j \leq 60$, ou seja, se $p_j \geq 40$, então $q < 60$, e apenas a firma j atende todo o mercado, tal que $\pi_i = 0$
  - Se $q = 100 - p_j > 60$, ou seja, se $p_j < 40$, então $q > 60$, e mesmo que a firma j produza 60 unidades, ***haverá uma demanda residual para a firma i***:

$$q = q_i + q_j = q_i + 60 = 100 - p_i$$

$$q_i = 40 - p_i$$

$$\pi_i = p_i q_i - c q_i$$

$$\pi_i = (p_i - c)(40 - p_i)$$

  - ***Esse não poderá ser um equilíbrio de Nash, pois a empresa i tem incentivos para reduzir o preço.***

Bertrand com produtos homogêneos e restrição de capacidade

- Por outro lado, se $p_i < p_j$, a firma i poderá vender para no máximo 60 consumidores.
- Assim como no caso anterior, se $p_i < 40$, haverá ainda uma ***demanda residual para a firma j***:

$$q_j = 40 - p_j$$

Função de demanda residual de j, quando $p_i < p_j$

Qual será o lucro da firma *j*?

Bertrand com produtos homogêneos e restrição de capacidade

- Logo, se $p_i < 40$, desde que $p_i < p_j$, a empresa j irá maximizar seu lucro se jogar $p_j = 22$, produzir 18 unidades e ficar com lucro de 324.
- Voltando para a firma i qualquer preço $p_i < 22$ garantiria a vantagem da empresa i ($p_i < p_j$) e qualquer $p_i > 4$ garante lucros positivos. Logo, sabemos que:

$$4 < p_i < 22$$

- Porém, supondo que a firma decida $p_i = 21$, por exemplo, então a demanda será:

$$q_i = 100 - p_i = 100 - 21 = 79$$

  - Porém, a firma não consegue produzir 79 unidades, já que sua capacidade produtiva é de até 60 unidades.
- Nesse caso, ela terá que produzir até 60, logo o lucro será:

$$\pi_i = (21 - 4) \times 60 = 1020$$

Bertrand com produtos homogêneos e restrição de capacidade

- Logo, podemos formalizar a decisão da firma da seguinte forma:
- Se $p_i < p_j$, a firma i, nesse caso tem duas opções:
  - Vender $q = 100 - p_i$, ou;
  - Vender 60 unidades, se $q = 100 - p_i > 60$, e portanto a empresa i não puder atender toda a demanda gerada por p_i;
- Sendo assim, a firma escolherá:

$$q_i = \min\{100 - p_i, 60\}.$$

- E terá como lucro:

$$\pi_i = (p_i - c)\min\{100 - p_i, 60\}$$

  - ***Novamente, esse não poderá ser um equilíbrio de Nash, pois a empresa j tem incentivos para reduzir o preço.***
  - Ademais, observe que, com restrição de capacidade produtiva, jogar $\boldsymbol{p_i = c}$ **não pode ser um equilíbrio de Nash**, pois qualquer $p_i > 4$ é melhor do que $p_i = 4$, desde que $p_i < 22$.

Bertrand com produtos homogêneos e restrição de capacidade

- Finalmente, se $p_i = p_j > c$, o lucro será dividido entre as firmas, tal que:

$$\frac{(p_i - c)(100 - p_i)}{2}$$

- Porém, nesse caso haverá sempre um incentivo para que umas das firmas reduza ligeiramente o preço e obtenha uma parcela maior de mercado.
  - Logo, $p_i = p_j > c$ também ***não é um equilíbrio de Nash***.

Bertrand com produtos homogêneos e restrição de capacidade

- Podemos formalizar a função de recompensa da empresa i da seguinte forma:

$$\pi_i = \begin{cases} 0 \; se \; p_i > p_j \; e \; p_j \geq 40 \\ (p_i - c)(40 - p_i) \; se \; p_i > p_j \; e \; p_j < 40 \\ (p_i - c) \min\{100 - p_i, 60\} \; se \; p_i < p_j \\ \dfrac{(p_i - c)(100 - p_i)}{2} \; se \; p_i = p_j \end{cases}$$

Ou seja, ***nenhuma das possibilidades de preços podem constituir equilíbrios de Nash***, pois não podem ser a melhor resposta para ambas as firmas simultaneamente.

- Com essas funções de recompensa e observando todas as possibilidades de pares de preços, chegamos à conclusão de que o modelo de Bertrand com restrição de capacidade produtiva não possui equilíbrio de Nash. Esse resultado é conhecido como paradoxo de Edgeworth.

Bertrand com produtos diferenciados **sem restrição de capacidade produtiva**

Bertrand com produtos diferenciados

- Suponha duas empresas em um mercado com barreiras à entrada, que produzem produtos simulares (substitutos) porém com alguma diferenciação (não perfeitos). A demanda com que cada empresa se defronta é dada por:

$$q_i = 100 - 2p_i + p_j$$

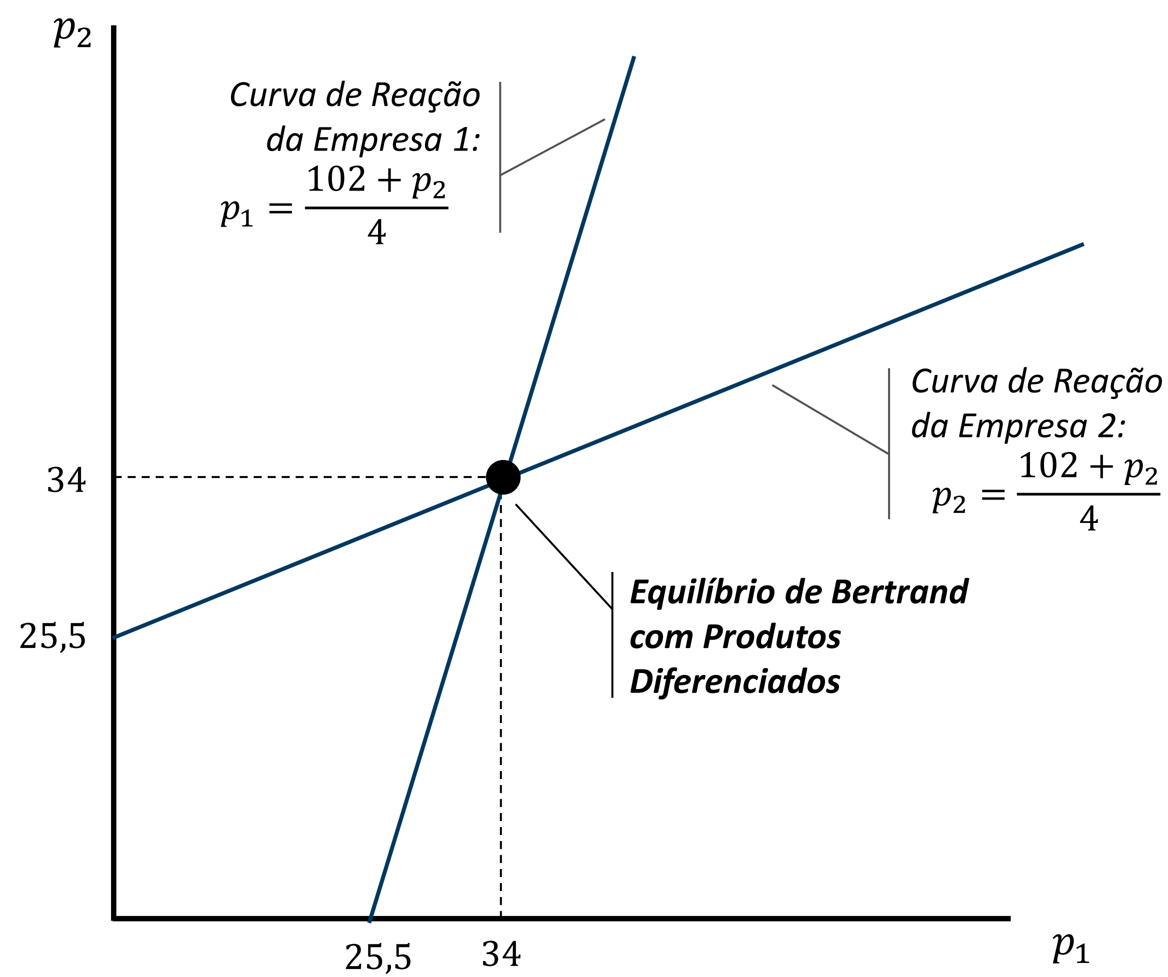
- Note que a demanda do produto da empresa i está inversamente relacionada com o preço da própria empresa e diretamente relacionada ao preço da empresa concorrente.

- Adicionalmente, vamos assumir que as duas empresas se defrontam com os mesmos custos de produção iguais a uma unidade monetária, tal que:

$$C_i = q_i$$

Qual será o equilíbrio de Nash?

Bertrand com produtos diferenciados



Bertrand com produtos diferenciados

- Quando as funções de reação são positivamente inclinadas, como as apresentadas acima, dizemos que as estratégias dos jogadores são **complementares estratégicas**.
  - Ou seja, quando uma empresa aumenta o preço, a melhor resposta da empresa concorrente é também aumentar o preço, e de forma análoga se uma das empresas reduz o preço, sua concorrente também teria como melhor resposta reduzir o preço.
  - Isso ocorre pois embora as empresas concorram diretamente, pelo fato de possuírem produtos diferenciados, conseguem reter uma parcela do mercado e manter lucros positivos mesmo com preço acima do custo marginal. **No ponto de equilíbrio de Nash, marcado pelo para (34,34), não há incentivos para que nenhuma das duas empresas altere seus preços**.
  - Vale ressaltar, que quando as curvas de reação das duas empresas são negativamente inclinadas, como no modelo de Cournot, dizemos que as estratégias são <u>substitutas estratégicas.</u>

Jogos de Localização

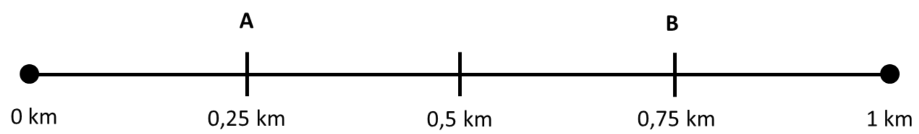
Jogos de Localização

- Hotelling (1929) foi o primeiro a buscar explicar a localização de empresas considerando suas estratégias de localização.
- O autor parte de um modelo simplificado no qual duas barracas de sorvete (A e B) devem escolher sua localização em uma praia de 1km de extensão.
- São pressupostos:
  - produtos homogêneos;
  - preços iguais;
  - custos de produção iguais, e;
  - custos unitários constantes.
- Sendo assim, a única diferenciação entre as barracas está relacionada à localização e, uma vez que os produtos e preços são idênticos, os consumidores sempre decidem comprar da barraca mais próxima.

Jogos de Localização

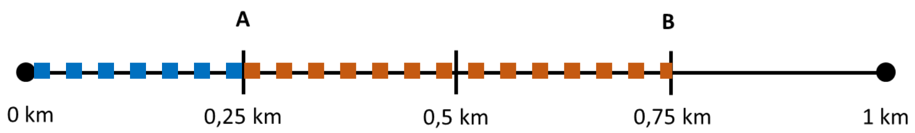
- Adicionalmente, assumimos que há N ***banhistas distribuídos de forma homogênea*** ao longo da praia, sendo que cada um deles compra uma unidade de sorvete.

- Se um ***planejador central*** puder definir a localização das barracas, uma escolha ótima no ponto de vista da divisão do mercado e da redução na distância para os consumidores, poderia ser representada da seguinte forma:



- Nessa localização possível (ou perfil de estratégias possível), as barracas dividem o mercado igualmente, ou seja, a barraca A irá vender para todos os consumidores a sua esquerda, mais a metade dos consumidores que estão entre as duas barracas.

Jogos de Localização

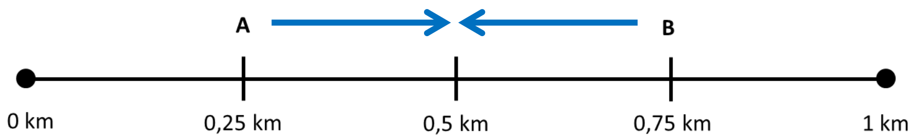


- Formalmente, podemos definir D_A, como demanda da barraca A, tal que:

$$D_A = 0{,}25N + \frac{(0{,}75 - 0{,}25)N}{2} = 0{,}5N$$

- Obviamente, a demanda de B, por simetria, será $D_B = 0{,}5N$.

Essa localização poderia ser um equilíbrio de Nash?

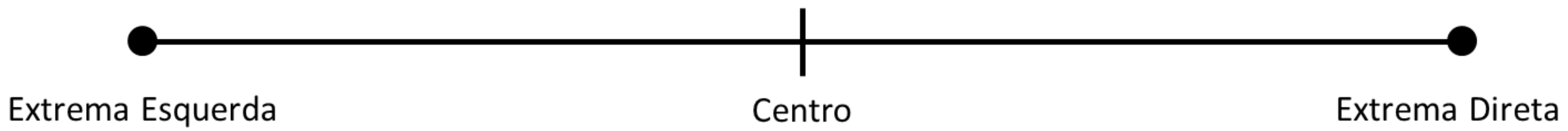


Jogos de Localização

- A única possibilidade de equilíbrio para essa versão do jogo de localização é o perfil de estratégias em que ambas decidem se localizar exatamente no centro da praia.
  - Apenas nesse caso, não haverá incentivo para que nenhuma das duas se mova em nenhuma direção. Vale ainda ressaltar, que do ponto de vistas das duas barracas, o resultado é exatamente idêntico (em termos de vendas) ao resultado das posições inicialmente sugeridas: cada uma tem metade do mercado.
  - Porém, ***a consequência "perversa" do jogo não cooperativo recai sobre o consumidor, que precisará andar mais para adquirir seu sorvete***.

Jogos de Localização

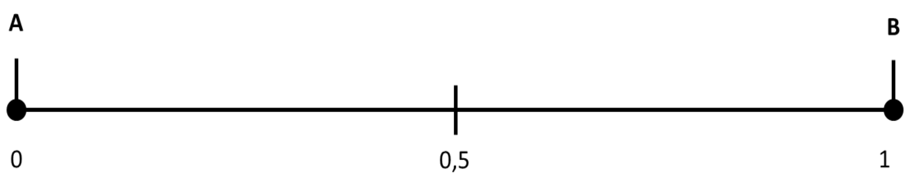
- Outra versão do mesmo jogo é conhecida como o “Jogo da Competição Eleitoral”. Suponha uma eleição na qual a posição dos candidatos em relação a determinada temática define o voto de cada eleitor. De forma esquemática, é possível admitir que as posições ideológicas dos eleitores podem ser representadas linearmente entre a extrema esquerda e a extrema direta, de tal forma que os eleitores se distribuem uniformemente entre os dois extremos ideológicos:



- Assim como no caso dos banhistas, podemos atribuir um valor para a “distância ideológica” entre as posições, a fim de analisar posições relativas entre os eleitores.

Jogos de Localização

- Assumindo novamente que a distância total é igual a unidade, podemos imaginar que dois candidatos concorrentes estejam localizados nos dois extremos ideológicos, conforme representado abaixo:



  - Nesse caso, o resultado da eleição é um empate entre os dois candidatos, pois cada um deles irá convencer exatamente a metade dos eleitores.

- Porém, se A se mover para o centro, qualquer aproximação mínima com o "eleitor mediano" (de posição ideológica igual a 0,5) irá fazer com que A ganhe a eleição.
  - Logo, ***a estratégia ilustrada não poderá ser de equilíbrio de Nash***, uma vez que, para qualquer posição de B depois do ponto 0,5, o candidato A poderia ganhar mais votos movendo seu discurso em direção ao centro. A análise para o candidato B é naturalmente simétrica.

Jogos de Localização

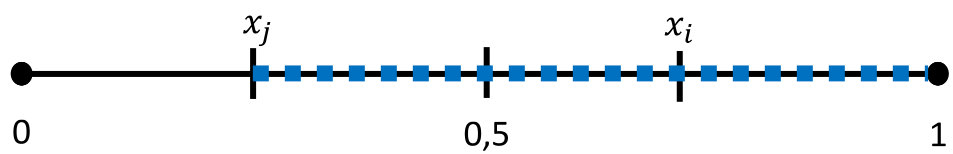
- Algebricamente, podemos representar a função de recompensa (U_i) dos dois candidatos em termos do resultado da eleição.
- A função U_i assume o valor 1 se o candidato vence a eleição, 0 se o resultado é empate, e -1 se a oposição vence.
- Se representarmos a posição ideológica do candidato i como x_i, a função de recompensa poderá ser representada considerando que o candidato que ganha a eleição será aquele mais próximo ideologicamente do eleitor mediano.
- Sendo assim, temos:

$$U_i = \begin{cases} 1 & se\ |x_i - 0{,}5| < |x_j - 0{,}5| \\ 0 & se\ |x_i - 0{,}5| = |x_j - 0{,}5| \\ -1 & se\ |x_i - 0{,}5| > |x_j - 0{,}5| \end{cases}$$

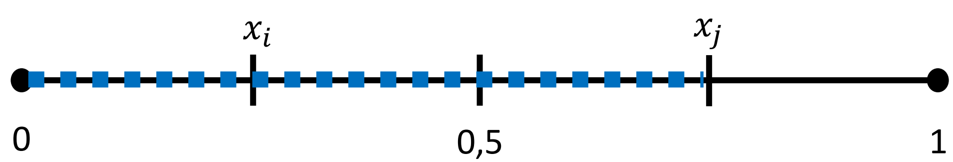
Jogos de Localização

- Por sua vez, a melhor resposta do jogador i deve conter um plano de estratégias para todas as ações possíveis do jogador j:

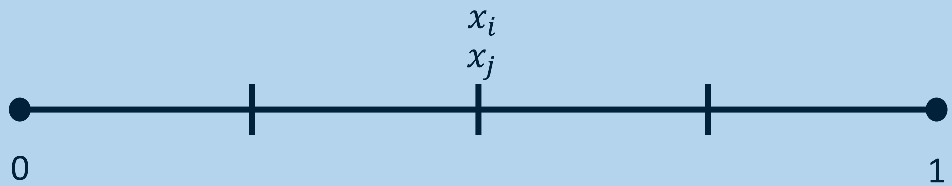
1. Se $x_j < 0{,}5$, a melhor resposta de i será jogar x_i tal que $x_j < x_i < 1 - x_j$;



2. Se $x_j > 0{,}5$, a melhor resposta de i será jogar x_i tal que $1 - x_j < x_i < x_j$;



3. Se $x_j = 0{,}5$, a melhor resposta de i será jogar $x_i = 0{,}5$.



Equilíbrio de Nash do jogo

Jogos de Localização

- Consequentemente, o discurso eleitoral será destinado ao eleitor mediano e os discursos dos candidatos serão muito semelhantes.
- Nas palavras de Hotelling (1929, pp. 54-55):

"The competition for votes between the Republican and Democratic parties does not lead to a clear drawing of issues, and adoption of two strongly contrasted position between which the voter may choose. Instead, each party strives to make its platform as much like the other's as possible. ***Any radical departure would lose many votes****, even though it might lead to stronger commendation of the party by some who would vote for it anyhow […]* ***Real differences, if the ever exist, fade gradually with time though the issues may be as important as ever****."*

Adicionando custos de transporte

Jogos de Localização com custos de Transporte

Voltando ao exemplo do sorvete, vamos modificar uma suposição: o que ocorreria com o resultado caso houvesse um custo de deslocamento para os banhistas que desejam comprar o sorvete?

- O preço final para o consumidor passa a ser representado por:

$$p^* = p + td$$

  - Em que p é o preço do sorvete para o vendedor, d é a distância entre o consumidor e o vendedor mais próximo, t é o custo de transporte por unidade de distância, e p^* é o preço percebido pelo consumidor.

- Adicionalmente, o consumidor possui um preço reserva, V (igual para todo banhista) e decidirá comprar o sorvete e se somente se:

$$p^* = p + td \leq V$$

- Logo, temos:

$$d \leq \frac{V - p}{t}$$

Se a distância for maior do que esse valor, a demanda por sorvete será zero.

Jogos de Localização com custos de Transporte

- Por outro lado, considerando que o custo unitário de produção é constante e igual a $c > 0$, e o custo fixo é igual a zero para ambas as barracas***, a quantidade total de banhistas comprando sorvete será máxima*** (todos compram) quando o preço for tal que, a restrição $p^* = p + td \leq V$, seja válida na igualdade, ou seja, quando:

$$p = V - td_m$$

  - Em que d_m é a maior distância que um banhista teria que percorrer para chegar à barraca.

- Esse preço será economicamente viável e maximizará o lucro sempre que $p > c$. O lucro de cada barraca i, quando todos os banhistas adquirem o produto pode ser representado por:

$$\pi_i = (p - c)q = (V - td_m - c)q$$

  - Em que d_m e q dependem diretamente da localização x_i, x_j escolhida para cada firma.

Jogos de Localização com custos de Transporte

- ***Suponha que as duas se estabeleçam no centro da praia***, tal que $x_i = x_j = 0{,}5$.
  - Nesse caso, o consumidor mais distante está no meio da praia, a 0,5 km de cada barraca, logo, cada firma vende para $0{,}5N$, logo, o lucro de cada firma será:

$$\pi_i = \pi_j = (p - c)q = (V - td_m - c)0{,}5N$$

  - Exatamente o mesmo resultado ocorreria se as duas firmas se localizarem exatamente nos ***extremos da praia***, ou seja, o consumidor mais distante está a 0,5km, e ambas atendem metade dos consumidores.
- Devido a simetria desse mercado, **qualquer localização em que uma das firmas possui uma participação de mercado (demanda total) maior do que a outra não poderá ser um equilíbrio de Nash**, pois as melhores respostas sempre serão simétricas para ambas as empresas.

Jogos de Localização com custos de Transporte

- Por conseguinte, em qualquer outra localização entre os extremos da praia e o centro podemos admitir que, em equilíbrio, ***o mercado será igualmente dividido*** entre as duas empresas, tal que:

$$\pi_i = (V - td_m - c)0{,}5N$$

- Como V, c, t e N não podem ser escolhidos no problema, ***a única variável que altera o lucro das barracas é a distância do último consumidor*** $\boldsymbol{d_m}$, que é função da escolha locacional de ambas as firmas e afeta negativamente o lucro.

- Sendo assim, o lucro será maximizado apenas quando d_m for mínima, o que ocorre apenas quando $\underline{x_i = 0{,}25 \text{ e } x_j = 0{,}75}$, qualquer mudança desse ponto fará com que d_m seja maior para algum consumidor, logo o preço seja menor e consequentemente o lucro também será menor.

O problema dos recursos comuns

O problema dos recursos comuns

- O problema referido na literatura como “tragédia dos comuns” diz respeito a um tipo de recurso com características econômicas específicas:
  - ***são bens rivais*** (o fato de que uma pessoa está usando pode impedir que outra pessoa utilize o bem ao mesmo tempo) ***e não excludentes*** (não existe impedimento ou barreira que limite o uso do bem).
  - Em outras palavras, trata-se de um recurso de livre acesso, que todos podem utilizar, mas se alguém está utilizando outra pessoa não pode usar ao mesmo tempo.
- Esse é o caso dos peixes do mar, das vias públicas quando estão congestionadas, e das praias lotadas no verão.
- A priori, não existe nenhum tipo de impedimento para a utilização desses bens, porém, quando muitas pessoas utilizam ao mesmo tempo ***o recurso pode se esgotar***.

O problema dos recursos comuns

- Um dos exemplos clássicos, formalizado em Fiani (2015) é uma zona de pesca utilizada por vários pescadores.
    - Os peixes são vendidos em um mercado competitivo que paga 1 real por peixe.
    - O valor total da **produção diária total** de peixes (v) é igual a **quantidade total** de peixes q, que é função da quantidade de barcos na zona pesqueira n.
- Formalmente:

$$v = q = f(n)$$

    - Com $f'(n) > 0$; $f''(n) < 0$ (ou seja, retornos marginais decrescentes)

O problema dos recursos comuns

- Sabendo que cada barco tem um custo fixo de $c > 0$, e nenhum custo marginal, a função de lucro total poder ser representada por:

$$\pi_T = q - nc$$

$$\pi_T = f(n) - nc$$

- Portanto, o lucro máximo da zona pesqueira como um todo ocorre quando:

$$\frac{\partial \pi_T}{\partial n} = f'(n) - c = 0$$

$$f'(n) = c$$

  - Ou seja, a produção máxima (com o maior lucro, total, possível) ocorre quando a produtividade do último barco é idêntica a seu custo marginal.

O problema dos recursos comuns

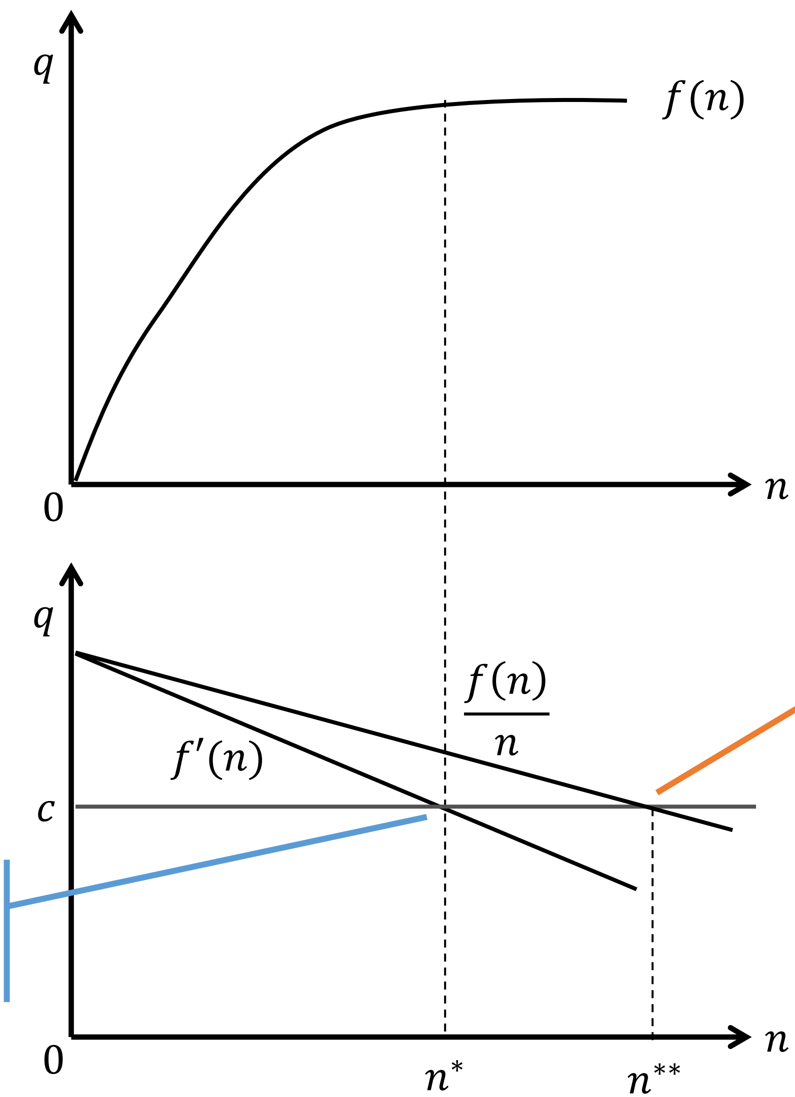
- Porém, se não houver qualquer controle em relação à quantidade de barcos na zona pesqueira, a decisão do número de barcos não será centralizada, mas sim de cada pescador.
- ***Logo, cada pescador será um jogador***, e poderá decidir levar ou não seu barco para aquela área diante dos lucros que podem ser obtidos.
- Os lucros individuais, por sua vez, irão depender da quantidade total de pescadores:

$$\pi_i = \frac{f(n)}{n} - c$$

  - Ou seja, o lucro depende da produção média entre todos os barcos
- Os pescadores, terão como melhor resposta ir pescar, sempre que o lucro for positivo, ou seja, quando:

$$\frac{f(n)}{n} > c$$

O problema dos recursos comuns



Quando as decisões são individuais, a melhor resposta de cada pescador é continuar pescando até o ponto de lucro zero.

O lucro máximo ocorre quando a produtividade do último barco é idêntica a seu custo marginal.

Nesse ponto, a quantidade de equilíbrio de barcos é n^{**}

Nesse ponto, a quantidade ótima de barcos é n^*

O problema dos recursos comuns

- Como se pode observar, novamente o equilíbrio de Nash mostra uma situação em que o mercado não chega a um ponto de ótimo, e acarretará em uma “superutilização” do recurso que pode levar à escassez.
- Nesse caso em particular, isso ocorre em decorrência das ***externalidades no processo produtivo***: quando um novo pescador entra na zona de pesca ele aumenta sua própria produção, porém reduz a produtividade dos demais pescadores (externalidade negativa).
  - Se essa externalidade não é levada em consideração na decisão individual, a solução não será ótima do ponto de vista social, ainda que a estratégia seja ótima do ponto de vista individual.

NEDUR

Núcleo de Estudos em Desenvolvimento Urbano e Regional

Universidade Federal do Paraná

Av. Prefeito Lothário Meissner, nº 632 – Setor de Ciências Sociais | UFPR

www.nedur.ufpr.br

nedur.ufpr@gmail.com