



NEDUR

Núcleo de Estudos em Desenvolvimento
Urbano e Regional
Universidade Federal do Paraná

Jogos Simultâneos de Informação Completa

Prof^a. Kênia Barreiro de Souza

Professora do Departamento de Economia e do Programa de Pós-Graduação em Desenvolvimento Econômico da Universidade Federal do Paraná e Pesquisadora do Núcleo de Estudos em Desenvolvimento Urbano e Regional (NEDUR)

Material desenvolvido para a disciplina de Teoria dos Jogos (SE358) do Curso de Ciências Econômicas da Universidade Federal do Paraná (UFPR). O uso desse material fica autorizado em outros cursos desde que devidamente citados os créditos.

Janeiro/2021

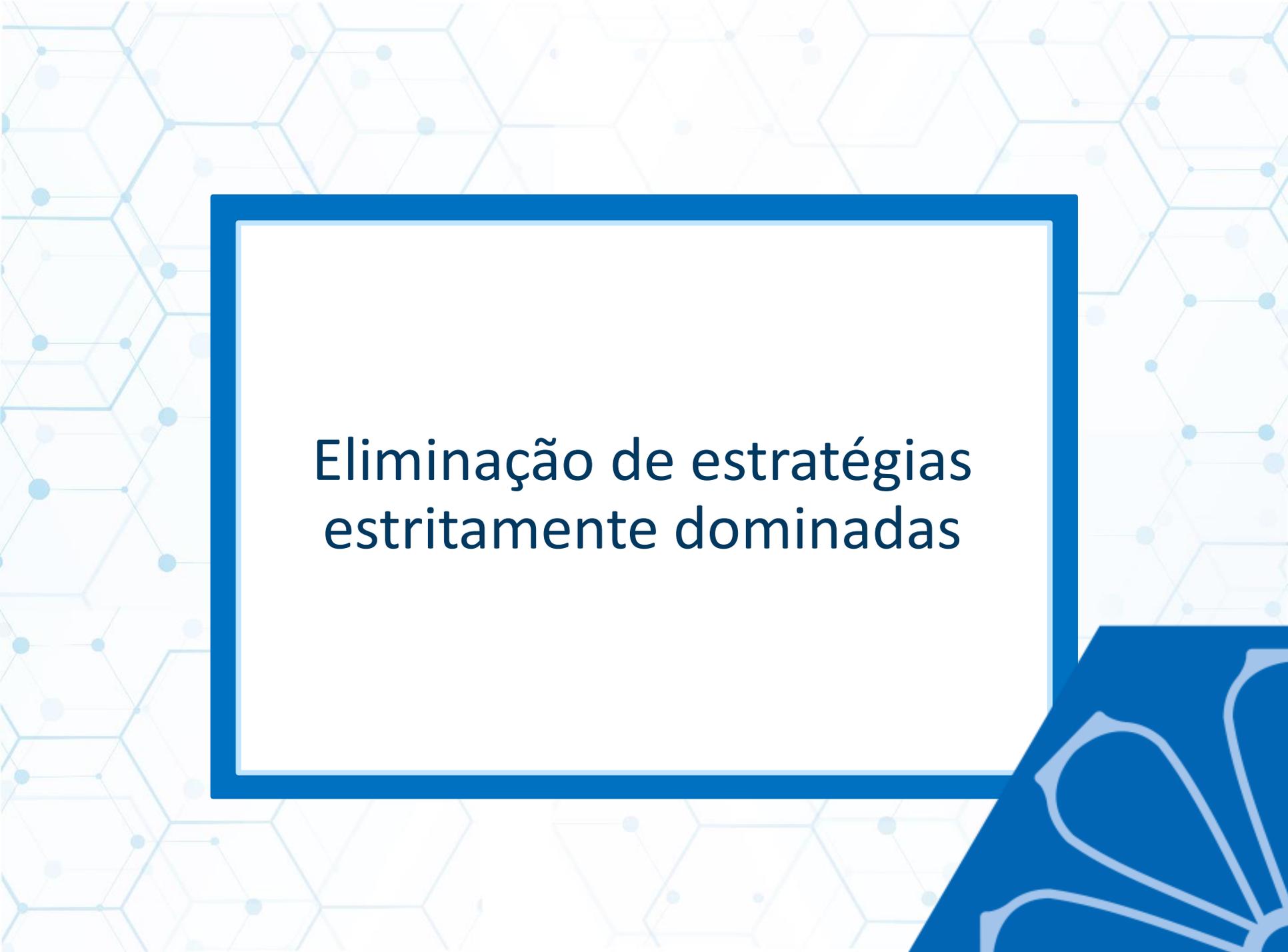
Referências

FIANI, R. (2015) Teoria dos Jogos. 4ª edição. Editora Campus. (Capítulo 3)

BIERMAN, H. S. FERNANDEZ, L. (2011) Teoria dos Jogos. Editora Pearson. (Capítulo 2)

Jogos Simultâneos de Informação Completa

- Vamos começar com jogos simultâneos de informação completa, nos quais todos os **jogadores são racionais** e possuem **conhecimento comum da racionalidade**.
 - Ou seja, o jogador 1 é racional e o jogador 2 é racional. O jogador 1 sabe que o jogador 2 é racional e o jogador 2 sabe que o jogador 1 é racional. O jogador 1 sabe que o jogador 2 sabe que ele é racional... E assim vai....
- Veremos duas formas de resolver jogos desse tipo:
 - Eliminação de estratégias estritamente dominadas;
 - Equilíbrio de Nash.



Eliminação de estratégias
estritamente dominadas

Eliminação de estratégias estritamente dominadas

- Uma estratégia será chamada de estritamente dominada se, e somente se, houver uma estratégia estritamente dominante.
- Por sua vez, ***uma estratégia será estritamente dominante se for a melhor estratégia independente da estratégia do outro jogador.***
- Um jogador racional nunca jogaria uma estratégia estritamente dominada, logo, podemos eliminá-la do jogo.

Eliminação de estratégias estritamente dominadas

- Vejamos o jogo hipotético apresentado por Gibbons (1992, p. 5-7), com a seguinte representação normal:

		Jogador 2		
		Esquerda	Centro	Direita
Jogador 1	Para cima	1,0	1,2	0,1
	Para baixo	0,3	0,1	2,0

- Para o jogador 1 “para cima” e “para baixo” não são estritamente dominadas.
 - Por exemplo, se o jogador 2 jogar Esquerda seria melhor para o jogador 1 jogar “para cima”, se o jogador 2 jogar direita seria melhor jogar “para baixo”.
- Por sua vez, para o Jogador 2, jogar “centro” é sempre melhor do que jogar direta.

Se os jogadores são racionais e o jogador 1 sabe quais são as estratégias do jogador 2 e sabe que o jogador 2 é racional, então o jogador 1 sabe que a estratégia direita nunca será jogada, e poderá jogar o jogo **como se essa estratégia simplesmente não existisse** para o jogador 2.

Eliminação de estratégias estritamente dominadas

- Ou seja, se a estratégia direita é estritamente dominada pela estratégia centro, o jogador 1 pode jogar o jogo como se:

		Jogador 2	
		Esquerda	Centro
Jogador 1	Para cima	1,0	1,2
	Para baixo	0,3	0,1

- No novo jogo, independente do que o jogador 2 faça, “para cima” é sempre a melhor estratégia para o jogador 1, e por consequência, a estratégia “para baixo” também pode ser eliminada (ou seja, a estratégia “para baixo” é estritamente dominada pela estratégia “para cima”).

- Logo, temos:

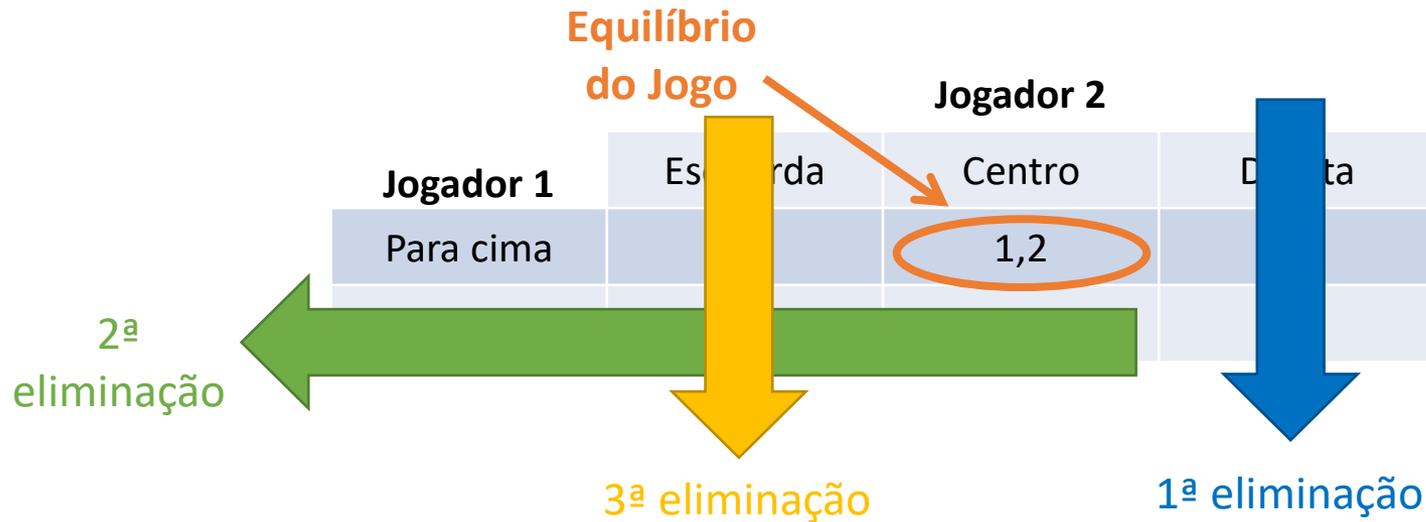
		Jogador 2	
		Esquerda	Centro
Jogador 1	Para cima	1,0	1,2

- Nesse ponto, sabemos que o jogador 1 escolherá sempre “para cima” e resta ao jogador 2 escolher entre esquerda e centro. Como o jogador 2 sabe que o jogador 1 sempre escolherá “para cima”, sua escolha óbvia será jogar centro.

Eliminação de estratégias estritamente dominadas

		Jogador 2		
		Esquerda	Centro	Direita
Jogador 1	Para cima	1,0	1,2	0,1
	Para baixo	0,3	0,1	2,0

Eliminação de estratégias estritamente dominadas



- Logo, {para cima; centro} é o equilíbrio do jogo. E o processo para encontrar esse equilíbrio é chamado de *eliminação iterativa de estratégias estritamente dominadas*.

Eliminação de estratégias estritamente dominadas

- O conceito pode ser formalizado como segue:
 - Em um jogo com N jogadores, com $i = 1, \dots, N$, no qual as estratégias de cada jogador i podem ser representadas por s_i ; as estratégias de todos os demais jogadores exceto i são representadas por s_{-i} ; as funções de recompensa do jogador i são representadas por π_i ; uma dada estratégia s_i^* será **estritamente dominante** em relação a outra estratégia s_i^{**} , se, e somente se:

$$\pi_i(s_i^*, s_{-i}) > \pi_i(s_i^{**}, s_{-i}) \quad \forall s_{-i}$$

Eliminação de estratégias estritamente dominadas

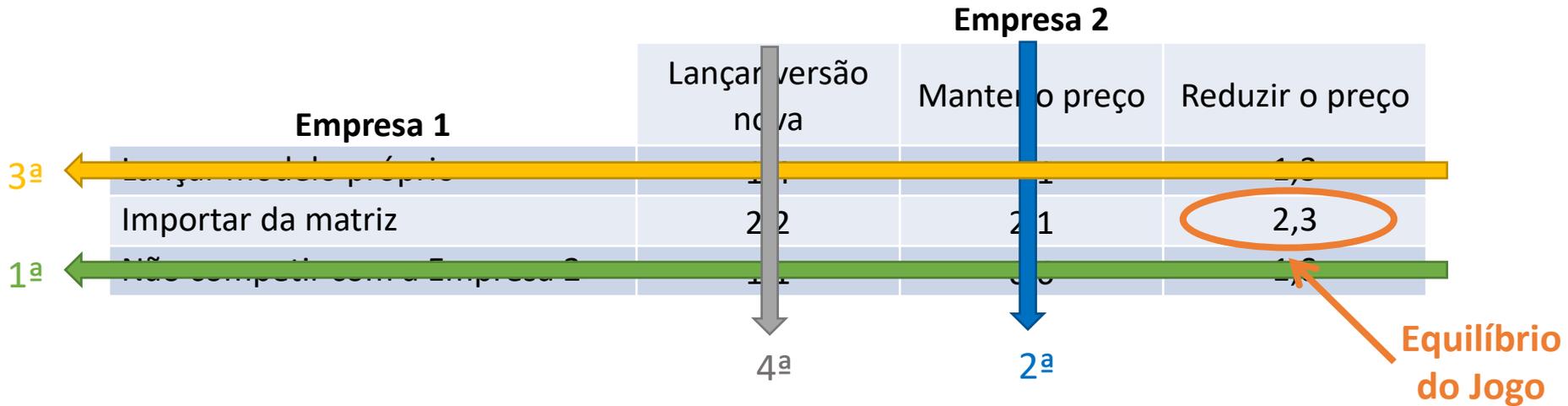
- Vejamos um exemplo adicional, adaptado de Fiani (2015, p. 89).

Empresa 1	Empresa 2		
	Lançar versão nova	Manter o preço	Reduzir o preço
Lançar modelo próprio	1,4	4,1	1,3
Importar da matriz	2,2	2,1	2,3
Não competir com a Empresa 2	1,1	0,6	1,0

Qual seria o equilíbrio de estratégias estritamente dominantes nesse jogo?

Eliminação de estratégias estritamente dominadas

- Vejamos um exemplo adicional, adaptado de Fiani (2015, p. 89).



Estratégias fracamente dominantes

- Embora nos dois exemplos apresentados, a eliminação iterativa de estratégias estritamente dominadas tenha resultado em um equilíbrio único, isso nem sempre acontece. Em outros casos, não haverá uma estratégia estritamente dominada, e será necessário flexibilizar esse conceito para incluir **estratégias fracamente dominantes e dominadas**.
- Formalmente, em um jogo com N jogadores, para cada jogador $i = 1, \dots, N$, cujas estratégias são representadas por s_i , as estratégias dos demais jogadores são representadas por s_{-i} , e a função de recompensa do jogador i seja π_i , uma dada estratégia s'_i será **fracamente dominante** em relação a outra estratégia s''_i , se, e somente se:

$$\pi_i(s'_i, s_{-i}) \geq \pi_i(s''_i, s_{-i}) \quad \forall s_{-i}, e$$
$$\pi_i(s'_i, s_{-i}) > \pi_i(s''_i, s_{-i}) \quad \text{para algum } s_{-i}$$

Estratégias fracamente dominantes

- Vejamos um exemplo, adaptado de Pindyck e Rubinfeld (2010, p. 429).
- Duas empresas competem no mercado e precisam decidir seus gastos com propaganda.
- O retorno desse gasto depende da decisão da empresa adversária.
- *Começando pela Empresa A:*

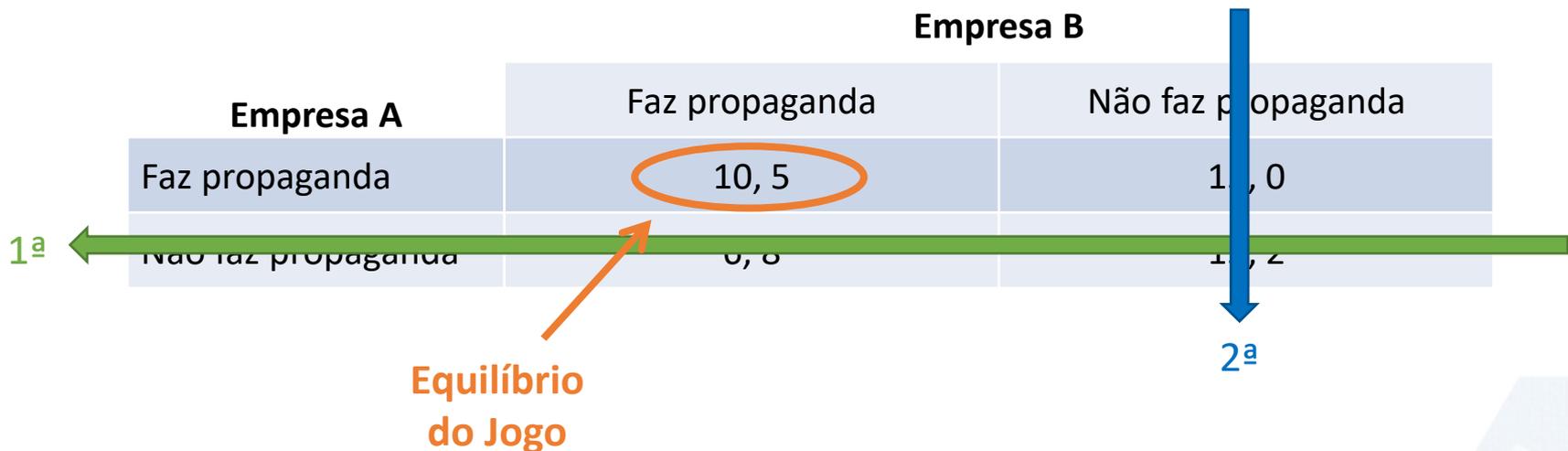
		Empresa B	
		Faz propaganda	Não faz propaganda
Empresa A	Faz propaganda	10, 5	15, 0
	Não faz propaganda	6, 8	15, 2

Estratégias fracamente dominantes

- Vejamos um exemplo, adaptado de Pindyck e Rubinfeld (2010, p. 429).
- Duas empresas competem no mercado e precisam decidir seus gastos com propaganda.
- O retorno desse gasto depende da decisão da empresa adversária.
- *Começando pela Empresa A:*

		Empresa B	
		Faz propaganda	Não faz propaganda
1ª	Empresa A Faz propaganda	10, 5	1, 0
	Não faz propaganda	0, 0	1, 2

Equilíbrio do Jogo



Estratégias fracamente dominantes

- *Começando pela empresa B:*

		Empresa B	
		Faz propaganda	Não faz propaganda
Empresa A	Faz propaganda	10, 5	1, 0
	Não faz propaganda	0, 0	1, 2

2^a ←

Equilíbrio do Jogo

1^a ↓

Nesse caso, mesmo usando estratégias fracamente dominantes, o resultado é o mesmo.
Mas isso nem sempre ocorre!

Estratégias fracamente dominantes

- Pode ocorrer, por exemplo, que exista mais de uma estratégia fracamente dominada. Vejamos um exemplo em que isso ocorre (Mas-Colell *et al.*, 1995, p. 238):

		Jogador 2	
		L	R
Jogador 1			
U		5,1	4,0
M		6,0	3,1
D		6,4	4,4

Estratégias fracamente dominantes

- Pode ocorrer, por exemplo, que exista mais de uma estratégia fracamente dominada. Vejamos um exemplo em que isso ocorre (Mas-Colell *et al.*, 1995, p. 238):

		Jogador 2	
		L	R
Jogador 1	U	5,1	3,0
	M	3,3	3,1
	D	6,4	4,4

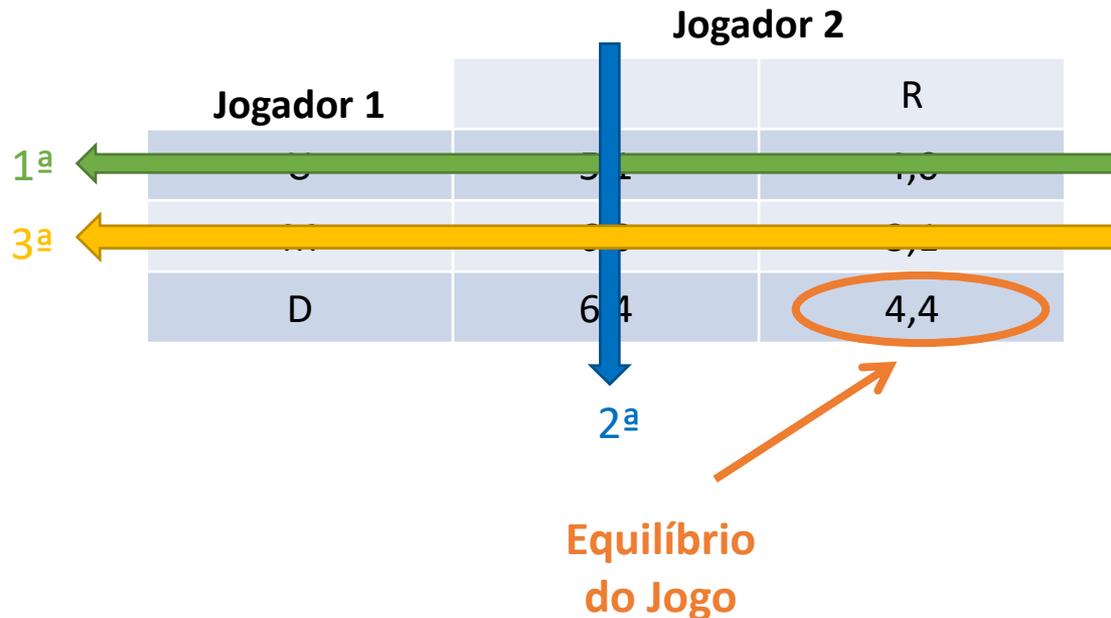
3ª ← (Yellow arrow pointing to row U)
 1ª ← (Green arrow pointing to row M)
 2ª ↓ (Blue arrow pointing to column R)
 Equilíbrio do Jogo → (Orange arrow pointing to cell 6,4)

Estratégias fracamente dominantes

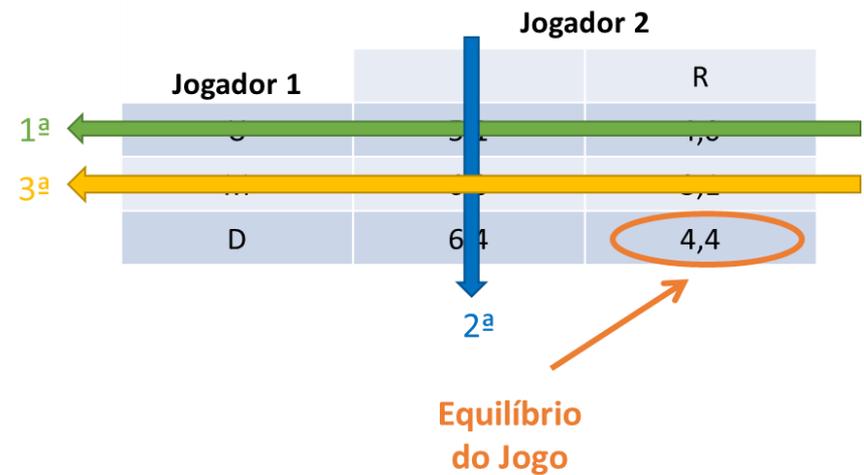
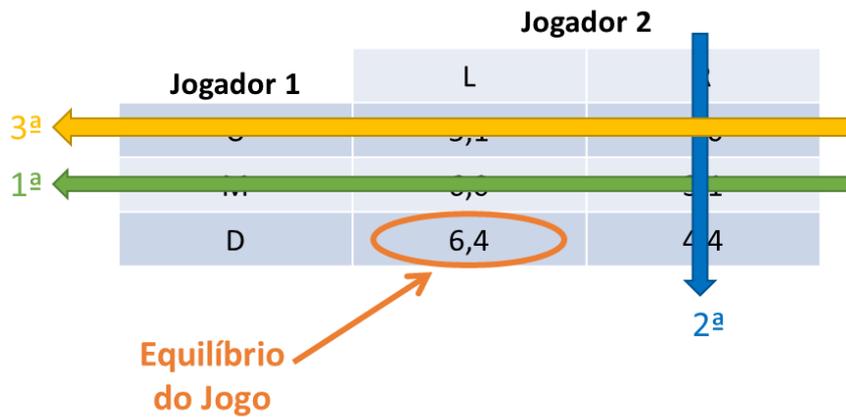
- Pode ocorrer, por exemplo, que exista mais de uma estratégia fracamente dominada. Vejamos um exemplo em que isso ocorre (Mas-Colell *et al.*, 1995, p. 238):

		Jogador 2	
		D	R
Jogador 1	1ª	5,2	1,3
	3ª	5,2	3,2
		D	R
		6,4	4,4

Equilíbrio do Jogo



Estratégias fracamente dominantes



Esse exemplo mostra que não podemos garantir que a eliminação iterativa de estratégias fracamente dominantes conduz a um resultado único.

Jogos solucionáveis por dominância

- *Devemos, portanto, usar essa forma de solução apenas no caso de dominância estrita:*
 - Quando a eliminação iterativa de estratégias estritamente dominadas nos deixar com apenas uma estratégia para cada jogador, diz-se que o jogo analisado é **solucionável por dominância**.
- É importante levar em consideração que na eliminação iterativa de estratégias estritamente dominadas estamos supondo que cada jogador é racional e que a racionalidade dos jogadores é de conhecimento comum. Essa hipótese é chamada de **conhecimento comum da racionalidade (CCR)**.

As estratégias que “sobrevivem” à eliminação iterativa de estratégias estritamente dominadas são chamadas de RACIONALIZÁVEIS.

Estratégias racionalizáveis

- Em um jogo simultâneo com dois jogadores i e j , em que a estrutura do jogo e a racionalidade de ambos os jogadores são de conhecimento comum, se nesse jogo alguma estratégia s'_i sempre produz um resultado pior para o jogador i do que todas as outras, não importando o que o jogador j faça (*ou seja, se a estratégia s'_i é estritamente dominada*), não há nenhuma razão em nenhuma circunstância, que justifique o jogador i escolher a estratégia s'_i . Desta forma, as estratégias que restam em um processo de eliminação iterativa de estratégias estritamente dominadas são chamadas de **estratégias racionalizáveis**.

Apesar da simplicidade do método de eliminação iterativa de estratégias estritamente dominadas, ele apresenta uma grave limitação: ***nem todos os jogos apresentam estratégias estritamente dominadas.***

Exemplo

- Nesse exemplo, apresentado por Fiani (2015, p. 91) temos uma empresa que está decidindo se entra ou não no mercado nacional, no qual outra empresa (Dominante) possui parcela significativa do mercado.

		Entrante Potencial		
		Não exporta	Exporta em pequena escala	Exporta em larga escala
Dominante	Investe	2,1	1,0	0,-1
	Não investe	1,0	2,1	-1,2

- Como podemos observar, nenhuma das duas empresas possui estratégias estritamente dominantes e por isso não podemos encontrar um equilíbrio pelo método de eliminação iterativa de estratégias estritamente dominadas. Essa limitação, leva a um conceito menos restrito, o de **equilíbrio de Nash**.

Equilíbrio de Nash

Equilíbrio de Nash

- **Definição:** *Uma combinação de estratégias constitui um equilíbrio de Nash quando cada estratégia é a melhor resposta às estratégias dos demais jogadores, e isso é verdade para todos os jogadores.*
- Formalmente, para que uma combinação de estratégias seja considerada um equilíbrio de Nash é necessário que, para cada estratégia s_i^* que pertence a combinação de estratégias do jogador i , tenhamos:

$$\pi_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq \pi_i(s_i, s_{-i}^*) \quad \forall s_i \text{ e } \forall i$$

- Logo, cada jogador joga o que é melhor para si, dada a estratégia do outro jogador.
- Como resultado, o equilíbrio de Nash busca basicamente situações em que não há qualquer incentivo para que os jogadores se desviem dessas estratégias.

Equilíbrio de Nash

- Reveja o último jogo da potencial entrante, existe um equilíbrio de Nash?
- Para chegarmos a uma conclusão precisamos encontrar as melhores respostas de cada jogador para cada estratégia de seu oponente:

Dominante	Entrante Potencial		
	Não exporta	Exporta em pequena escala	Exporta em larga escala
Investe	2,1	1,0	0,-1
Não investe	1,0	2,1	-1,2

A combinação de melhores respostas no perfil {investe; não exporta} é o ***equilíbrio de Nash do jogo.***

Qual é o equilíbrio de Nash?

- *Dilema dos prisioneiros*

		Jogador 2	
		Confessa	Não confessa
Jogador 1	Confessa	-2,-2	0,-4
	Não confessa	-4,0	-1,-1

Observe que se uma estratégia esse resultado é idêntico ao obtido por eliminação iterativas de estratégias dominadas! Falaremos disso daqui a pouco...

Qual é o equilíbrio de Nash?

- *Jogo hipotético:*

Jogador 1	Jogador 2		
	L	M	R
U	5,3	0,4	3,5
M	4,0	5,5	4,5
D	3,5	0,4	5,3

A combinação de melhores respostas no perfil {M; M} é o *equilíbrio de Nash* do jogo.

Qual é o equilíbrio de Nash?

- **Guerra dos sexos:** *Duas pessoas querem estar juntas, mas possuem preferências diferentes sobre o que fazer, o jogo original mostra um casal decidindo entre ir a uma apresentação de balé e a um jogo de futebol. Nessa versão, nosso casal moderno está decidindo entre ir ao cinema ou ficar em casa vendo Netflix.*

		Jogador 2	
		Cinema	Netflix
Jogador 1	Cinema	2,1	0,0
	Netflix	0,0	1,2

Há *dois equilíbrios de Nash*:
{Cinema, Cinema} e {Netflix, Netflix}

Qual é o equilíbrio de Nash?

- **O Jogo da “Galinha”:** Segundo Fiani (2015), o jogo ficou popular com o filme “Rebelde sem causa” de 1955. Dois adolescentes dirigem seus carros em alta velocidade, um em direção ao outro. Quem desviar primeiro “perde” o jogo e fica conhecido como covarde, ou chicken (galinha, do inglês), porém se nenhum desvia, ambos sofrem um acidente grave.

		Jogador 2	
		Não desvia	Desvia
Jogador 1	Não desvia	-2,-2	2,-1
	Desvia	-1,2	0,0

Há *dois equilíbrios de Nash*: {Não Desvia, Desvia} e {Desvia, Não Desvia}

- Uma interessante aplicação do jogo é utilizada para explicar o período da Guerra Fria, quando o enfrentamento entre Estados Unidos e a antiga União Soviética poderia levar a um conflito nuclear, e destruição de ambas as potências.

Qual é o equilíbrio de Nash?

- **Jogo das moedas:** cada jogador joga uma moeda, se ambas as moedas mostram o mesmo lado {cara, cara} ou {coroa, coroa}, o Jogador 1 vence; se as moedas mostram lados diferentes {cara; coroa} ou {coroa; cara}, o jogador 2 vence.

		Jogador 2	
		Cara	Coroa
Jogador 1	Cara	1,-1	-1,1
	Coroa	-1,1	1,-1

O jogo *não possui equilíbrio de Nash* em estratégias puras!

- Vale ressaltar que o jogo das moedas se caracteriza na definição de um **jogo estritamente competitivo**: qualquer aumento de payoff de um jogador implica em perda para seu oponente.
- Para o jogo das moedas, há uma segunda particularidade: a soma dos payoffs de cada perfil de estratégias é sempre zero, caracterizando os chamados **jogo estritamente competitivos de soma zero**.

Qual é o equilíbrio de Nash?

- **O jogo da caça ao cervo:** o jogo mostra como muitas vezes o imediatismo prevalece ao planejamento. Dois caçadores planejam caçar cervos, que é um trabalho para duas pessoas. Quando eles conseguem caçar um cervo, ambos têm alimento para pelo menos três dias. O problema de coordenação surge pois no momento da caça existem várias lebres disponíveis e fáceis de caçar, porém, uma lebre alimenta apenas uma pessoa por um dia.

		Caçador B	
		Cervo	Lebre
Caçador A	Cervo	3,3	0,1
	Lebre	1,0	1,1

Há *dois equilíbrios de Nash*: {Cervo, Cervo} e {Lebre, Lebre}

Equilíbrio de Nash vs Equilíbrio de estratégias estritamente dominadas

- No caso do dilema dos prisioneiros, a **eliminação iterativa de estratégias estritamente dominadas e o equilíbrio de Nash mostram a mesma solução**, porém nem sempre isso será verdade.
- Para delimitarmos as situações em que os dois equilíbrios coincidem, precisamos restringir um pouco mais o equilíbrio de Nash, para o conceito de **Equilíbrio de Nash estrito**.
 - Para que uma combinação de estratégias seja considerada um equilíbrio de Nash estrito é necessário que, para cada estratégia s_i^* que pertence a combinação de estratégias do jogador i , tenhamos:

$$\pi_i(s_i^*, s_{-i}^*) > \pi_i(s_i, s_{-i}^*) \quad \forall s_i \text{ e } \forall i$$

- Logo, nem todo equilíbrio de Nash será um equilíbrio de Nash estrito.

Equilíbrio de Nash vs Equilíbrio de estratégias estritamente dominadas

- Essa definição nos permite relacionar o equilíbrio de Nash com o equilíbrio de estratégias dominantes.
- O equilíbrio de Nash estrito define que a estratégia de equilíbrio s_i^* deve ser **estritamente melhor** (maior payoff) do que qualquer outra estratégia s_i desse jogador, **para cada estratégia dos demais jogadores s_{-i}^*** , e essa condição é válida **simultaneamente para todos os jogadores**.
- Por sua vez, no equilíbrio de estratégias dominantes, a solução impõe que a estratégia seja **a melhor independente da estratégia dos demais jogadores**, e isso é válido simultaneamente para todos os jogadores.
- Porém, se uma estratégia é a melhor independente da estratégia dos demais, ela também será a melhor para cada estratégia dos demais jogadores.
 - Logo, todo equilíbrio de estratégias dominantes será um equilíbrio de Nash estrito.

Equilíbrio de Nash vs Equilíbrio de estratégias estritamente dominadas

- Vale ainda ressaltar, que mesmo que o equilíbrio de Nash exista, e seja um equilíbrio único, ele não necessariamente traz a ***melhor situação para todos os jogadores.***
- Conceitualmente, o equilíbrio de Nash mostra o que os jogadores fariam se jogassem de forma racional e aplicassem as suas melhores respostas para quaisquer estratégias dos seus oponentes, o que não implica em um resultado otimizado do jogo, ou mesmo que qualquer pessoa jogaria o jogo dessa forma.
- ***Por consequência, não há nenhuma relação entre o resultado de um equilíbrio de Nash e um ótimo de Pareto.***

Equilíbrio de Nash vs Equilíbrio de estratégias estritamente dominadas

- Vejamos o caso do dilema dos prisioneiros, se ambos não confessam, ambos estariam melhores, ou seja, seria possível melhorar a situação de ambos simplesmente não confessando, porém, não há nenhum incentivo para que os jogadores optem pelo perfil {confessa, confessa} dado que a racionalidade é de conhecimento comum.

		Jogador 2	
		Confessa	Não confessa
Jogador 1	Confessa	-2,-2	0,-4
	Não confessa	-4,0	-1,-1

Equilíbrio de Nash

Ótimo de Pareto

Equilíbrio de Nash vs Equilíbrio de estratégias estritamente dominadas

- Em outros casos, como no jogo do cervo e da lebre, ou a guerra dos sexos, existem **dois equilíbrios de Nash** (podem ocorrer jogos com mais de dois equilíbrios), tornando difícil prever quais serão as estratégias adotadas pelos jogadores envolvidos.
- Porém, nesses casos algum desses equilíbrios pode sobressair em decorrência de assimetrias no conhecimento comum dos jogadores, ou mesmo devido a convenções sociais, nesse caso chamamos o equilíbrio “escolhido” de **ponto focal**.

Próxima aula...

**Aplicações do Equilíbrio de
Nash em Estratégias
Contínuas**



NEDUR

Núcleo de Estudos em Desenvolvimento
Urbano e Regional

Universidade Federal do Paraná



Av. Prefeito Lothário Meissner, nº 632 – Setor de Ciências Sociais | UFPR



www.nedur.ufpr.br



nedur.ufpr@gmail.com