NEDUR
Núcleo de Estudos em Desenvolvimento Urbano e Regional
Universidade Federal do Paraná

Insumo-Produto: Modelos Inter-regionais

Alexandre Porsse[Φ] • Vinícius Vale[Φ]

[Φ] Professor do Departamento de Economia e do Programa de Pós-Graduação em Desenvolvimento Econômico (PPGDE) da Universidade Federal do Paraná (UFPR) e Pesquisador do Núcleo de Estudos em Desenvolvimento Urbano e Regional (NEDUR)

Material desenvolvido para a disciplina Economia Regional e Urbana do Curso de Ciências Econômicas da Universidade Federal do Paraná (UFPR). Os professores autorizam o uso desse material em outros cursos desde que devidamente citados os créditos.

Agosto/2020

UFPR
PPGDE
Programa de Pós-Graduação em Desenvolvimento Econômico - UFPR

Tópicos

- Modelo regional versus modelo inter-regional
- Modelo inter-regional de insumo-produto
- Exemplo numérico
- Multiplicadores
- Índices de ligação

NEDUR

Modelos regionais e inter-regionais

- **Modelo regional:**
  - Região desconectada do restante do país
  - Não reconhece as inter-relações entre as regiões
  - Efeitos econômicos subestimados

- **Modelo inter-regional:**
  - Capta as ligações inter-regionais
  - Efeito econômico total é maior

Modelo inter-regional

Sistema inter-regional de insumo-produto

	Setores Região L	Setores Região M	Região L	Região M	
Setores Região L	Insumos Intermediários (Z^{LL})	Insumos Intermediários (Z^{LM})	Demanda Final (Y^{LL})	Demanda Final (Y^{LM})	Demanda Total (X^{L})
Setores Região M	Insumos Intermediários (Z^{ML})	Insumos Intermediários (Z^{MM})	Demanda Final (Y^{ML})	Demanda Final (Y^{MM})	Demanda Total (X^{M})
	Importações (M^{L})	Importações (M^{M})	Importações (M^{L})	Importações (M^{M})	M
	IIL (T^{L})	IIL (T^{M})	IIL (T^{L})	IIL (T^{M})	T
	Valor Adicionado (W^{L})	Valor Adicionado (W^{M})			
	Produção Total (X^{L})	Produção Total (X^{M})			

Modelo inter-regional

- Para apresentar a estrutura básica do **modelo inter-regional de insumo-produto**, suponha uma economia com:
    - 2 (duas) regiões: L e M
    - 3 (três) setores produtivos em L
    - 2 (dois) setores produtivos em M

Modelo inter-regional

Sistema inter-regional - setor x setor

Matriz IP		L 1	L 2	L 3	M 1	M 2	DF	DT
L	1	150	500	50	25	75	200	1000
L	2	200	100	400	200	100	1000	2000
L	3	300	500	50	60	40	50	1000
M	1	75	100	60	200	250	515	1200
M	2	50	25	25	150	100	450	800
VA		225	775	415	565	235		
PT		1000	2000	1000	1200	800		

Fonte: Miller e Blair (2009) – *Many-Region Models: The Interregional Approach*.
*Ver arquivo Excel.

Modelo inter-regional

- Dessa maneira, os fluxos monetários interindustriais (**consumo intermediário**) são representados pela matriz ($\mathbf{Z}$):

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}^{\mathrm{LL}} & \mathbf{Z}^{\mathrm{LM}} \\ \mathbf{Z}^{\mathrm{ML}} & \mathbf{Z}^{\mathrm{MM}} \end{bmatrix} \quad (1)$$

em que $\mathbf{Z}^{\mathrm{LL}}$ e $\mathbf{Z}^{\mathrm{MM}}$ são as matrizes com os **fluxos intra-regionais** e $\mathbf{Z}^{\mathrm{LM}}$ e $\mathbf{Z}^{\mathrm{ML}}$ as matrizes com os **fluxos inter-regionais**.

- Essa matrizes de fluxos intra-regionais e inter-regionais mostram os fluxos entre as indústrias de ambas as regiões (cada fluxo z_{ij}):

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} z_{11}^{\mathrm{LL}} & z_{12}^{\mathrm{LL}} & z_{13}^{\mathrm{LL}} & z_{11}^{\mathrm{LM}} & z_{12}^{\mathrm{LM}} \\ z_{21}^{\mathrm{LL}} & z_{22}^{\mathrm{LL}} & z_{23}^{\mathrm{LL}} & z_{21}^{\mathrm{LM}} & z_{22}^{\mathrm{LM}} \\ z_{31}^{\mathrm{LL}} & z_{32}^{\mathrm{LL}} & z_{33}^{\mathrm{LL}} & z_{31}^{\mathrm{LM}} & z_{32}^{\mathrm{LM}} \\ z_{11}^{\mathrm{ML}} & z_{12}^{\mathrm{ML}} & z_{13}^{\mathrm{ML}} & z_{11}^{\mathrm{MM}} & z_{12}^{\mathrm{MM}} \\ z_{21}^{\mathrm{ML}} & z_{22}^{\mathrm{ML}} & z_{23}^{\mathrm{ML}} & z_{21}^{\mathrm{MM}} & z_{22}^{\mathrm{MM}} \end{bmatrix} \quad (2)$$

Modelo inter-regional

- A produção total (produto) de cada um dos setores em cada uma da regiões é dada por:

$$
\begin{aligned}
x_1^{\mathrm{L}} &= z_{11}^{\mathrm{LL}} + z_{12}^{\mathrm{LL}} + z_{13}^{\mathrm{LL}} + z_{11}^{\mathrm{LM}} + z_{12}^{\mathrm{LM}} + y_1^{\mathrm{L}} \\
x_2^{\mathrm{L}} &= z_{21}^{\mathrm{LL}} + z_{22}^{\mathrm{LL}} + z_{23}^{\mathrm{LL}} + z_{21}^{\mathrm{LM}} + z_{22}^{\mathrm{LM}} + y_2^{\mathrm{L}} \\
x_3^{\mathrm{L}} &= z_{31}^{\mathrm{LL}} + z_{32}^{\mathrm{LL}} + z_{33}^{\mathrm{LL}} + z_{31}^{\mathrm{LM}} + z_{32}^{\mathrm{LM}} + y_3^{\mathrm{L}} \\
x_1^{\mathrm{M}} &= z_{11}^{\mathrm{ML}} + z_{12}^{\mathrm{ML}} + z_{13}^{\mathrm{ML}} + z_{11}^{\mathrm{MM}} + z_{12}^{\mathrm{MM}} + y_1^{\mathrm{M}} \\
x_2^{\mathrm{M}} &= z_{21}^{\mathrm{ML}} + z_{22}^{\mathrm{ML}} + z_{23}^{\mathrm{ML}} + z_{21}^{\mathrm{MM}} + z_{22}^{\mathrm{MM}} + y_2^{\mathrm{M}}
\end{aligned}
\tag{3}
$$

em que $z_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{LL}}$ e $z_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{MM}}$ são as vendas interindustriais dentro das regiões (**intra-regional**), $z_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{LM}}$ e $z_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{ML}}$ são as vendas interindustriais entre as regiões (**inter-regional**) e $y_{\mathrm{i}}^{\mathrm{L}}$ e $y_{\mathrm{i}}^{\mathrm{M}}$ são as vendas para os agentes de demanda final.

Modelo inter-regional

- Assim como no modelo regional de insumo-produto, assumindo que cada um dos setores produz bens e serviços segundo uma “receita” fixa, podemos definir os coeficientes técnicos.
- Os **coeficientes de insumo regional** são dados por:

$$a_{ij}^{LL} = \frac{z_{ij}^{LL}}{x_j^{L}} \quad \text{e} \quad a_{ij}^{MM} = \frac{z_{ij}^{MM}}{x_j^{M}} \qquad (4)$$

- Os **coeficientes de comércio inter-regional** são dados por:

$$a_{ij}^{ML} = \frac{z_{ij}^{ML}}{x_j^{L}} \quad \text{e} \quad a_{ij}^{LM} = \frac{z_{ij}^{LM}}{x_j^{M}} \qquad (5)$$

- Esses **coeficientes técnicos** também são fixos no modelo inter-regional (os setores usam insumos em proporções fixas).

Modelo inter-regional

- Utilizando os coeficientes de insumo regional e de comércio inter-regional, equações (4) e (5), podemos reescrever as equações de produção (3) como:

$$
\begin{aligned}
x_1^{\mathrm{L}} &= a_{11}^{\mathrm{LL}}x_1^{\mathrm{L}} + a_{12}^{\mathrm{LL}}x_2^{\mathrm{L}} + a_{13}^{\mathrm{LL}}x_3^{\mathrm{L}} + a_{11}^{\mathrm{LM}}x_1^{\mathrm{M}} + a_{12}^{\mathrm{LM}}x_2^{\mathrm{M}} + y_1^{\mathrm{L}} \\
x_2^{\mathrm{L}} &= a_{21}^{\mathrm{LL}}x_1^{\mathrm{L}} + a_{22}^{\mathrm{LL}}x_2^{\mathrm{L}} + a_{23}^{\mathrm{LL}}x_3^{\mathrm{L}} + a_{21}^{\mathrm{LM}}x_1^{\mathrm{M}} + a_{22}^{\mathrm{LM}}x_2^{\mathrm{M}} + y_2^{\mathrm{L}} \\
x_3^{\mathrm{L}} &= a_{31}^{\mathrm{LL}}x_1^{\mathrm{L}} + a_{32}^{\mathrm{LL}}x_2^{\mathrm{L}} + a_{33}^{\mathrm{LL}}x_3^{\mathrm{L}} + a_{31}^{\mathrm{LM}}x_1^{\mathrm{M}} + a_{32}^{\mathrm{LM}}x_2^{\mathrm{M}} + y_3^{\mathrm{L}} \\
x_1^{\mathrm{M}} &= a_{11}^{\mathrm{ML}}x_1^{\mathrm{L}} + a_{12}^{\mathrm{ML}}x_2^{\mathrm{L}} + a_{13}^{\mathrm{ML}}x_3^{\mathrm{L}} + a_{11}^{\mathrm{MM}}x_1^{\mathrm{M}} + a_{12}^{\mathrm{MM}}x_2^{\mathrm{M}} + y_1^{\mathrm{M}} \\
x_2^{\mathrm{M}} &= a_{21}^{\mathrm{ML}}x_1^{\mathrm{L}} + a_{22}^{\mathrm{ML}}x_2^{\mathrm{L}} + a_{23}^{\mathrm{ML}}x_3^{\mathrm{L}} + a_{21}^{\mathrm{MM}}x_1^{\mathrm{M}} + a_{22}^{\mathrm{MM}}x_2^{\mathrm{M}} + y_2^{\mathrm{M}}
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Modelo inter-regional

- Isolando as demandas (y_i^L, y_i^M) e colocando em evidência o produto (x_i^L, x_i^M), temos:

$$
\begin{aligned}
&(1 - a_{11}^{LL})x_1^L - a_{12}^{LL}x_2^L - a_{13}^{LL}x_3^L - a_{11}^{LM}x_1^M - a_{12}^{LM}x_2^M = y_1^L \\
&-a_{21}^{LL}x_1^L + (1 - a_{22}^{LL})x_2^L - a_{23}^{LL}x_3^L - a_{21}^{LM}x_1^M - a_{22}^{LM}x_2^M = y_2^L \\
&-a_{31}^{LL}x_1^L - a_{32}^{LL}x_2^L + (1 - a_{33}^{LL})x_3^L - a_{31}^{LM}x_1^M - a_{32}^{LM}x_2^M = y_3^L \\
&-a_{11}^{ML}x_1^L - a_{12}^{ML}x_2^L - a_{13}^{ML}x_3^L + (1 - a_{11}^{MM})x_1^M - a_{12}^{MM}x_2^M = y_1^M \\
&-a_{21}^{ML}x_1^L - a_{22}^{ML}x_2^L - a_{23}^{ML}x_3^L - a_{21}^{MM}x_1^M + (1 - a_{22}^{MM})x_2^M = y_2^M
\end{aligned}
\tag{7}
$$

- Ou em termos matriciais:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{y} \tag{8}$$

em que $\mathbf{I}$ é a matriz identidade, $\mathbf{A}$ a matriz de coeficientes técnicos, $\mathbf{x}$ o vetor de produto e $\mathbf{y}$ o vetor de demanda final.

Modelo inter-regional

- Matriz de identidade:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \qquad (9)$$

- Matriz de coeficientes técnicos:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11}^{\mathrm{LL}} & a_{12}^{\mathrm{LL}} & a_{13}^{\mathrm{LL}} & a_{11}^{\mathrm{LM}} & a_{12}^{\mathrm{LM}} \\ a_{21}^{\mathrm{LL}} & a_{22}^{\mathrm{LL}} & a_{23}^{\mathrm{LL}} & a_{21}^{\mathrm{LM}} & a_{22}^{\mathrm{LM}} \\ a_{31}^{\mathrm{LL}} & a_{32}^{\mathrm{LL}} & a_{33}^{\mathrm{LL}} & a_{31}^{\mathrm{LM}} & a_{32}^{\mathrm{LM}} \\ a_{11}^{\mathrm{ML}} & a_{12}^{\mathrm{ML}} & a_{13}^{\mathrm{ML}} & a_{11}^{\mathrm{MM}} & a_{12}^{\mathrm{MM}} \\ a_{21}^{\mathrm{ML}} & a_{22}^{\mathrm{ML}} & a_{23}^{\mathrm{ML}} & a_{21}^{\mathrm{MM}} & a_{22}^{\mathrm{MM}} \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{\mathrm{LL}} & \mathbf{A}^{\mathrm{LM}} \\ \mathbf{A}^{\mathrm{ML}} & \mathbf{A}^{\mathrm{MM}} \end{bmatrix} \qquad (10)$$

Modelo inter-regional

- Vetor de produção:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1^{\mathrm{L}} \\ x_2^{\mathrm{L}} \\ x_3^{\mathrm{L}} \\ x_1^{\mathrm{M}} \\ x_2^{\mathrm{M}} \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{\mathrm{L}} \\ \mathbf{x}^{\mathrm{M}} \end{bmatrix} \qquad (11)$$

- Vetor de demanda final:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1^{\mathrm{L}} \\ y_2^{\mathrm{L}} \\ y_3^{\mathrm{L}} \\ y_1^{\mathrm{M}} \\ y_2^{\mathrm{M}} \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}^{\mathrm{L}} \\ \mathbf{y}^{\mathrm{M}} \end{bmatrix} \qquad (12)$$

Modelo inter-regional

- Ou seja, podemos reescrever a equação (8), $(\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{y}$, como:

$$\left\{\begin{bmatrix}\mathbf{I} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\mathbf{A}^{\mathrm{LL}} & \mathbf{A}^{\mathrm{LM}}\\ \mathbf{A}^{\mathrm{ML}} & \mathbf{A}^{\mathrm{MM}}\end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix}\mathbf{x}^{\mathrm{L}}\\ \mathbf{x}^{\mathrm{M}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{y}^{\mathrm{L}}\\ \mathbf{y}^{\mathrm{M}}\end{bmatrix} \qquad (13)$$

- Rearranjando, temos a equação básica do modelo de insumo-produto inter-regional:

$$\begin{bmatrix}\mathbf{x}^{\mathrm{L}}\\ \mathbf{x}^{\mathrm{M}}\end{bmatrix}=\left\{\begin{bmatrix}\mathbf{I} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\mathbf{A}^{\mathrm{LL}} & \mathbf{A}^{\mathrm{LM}}\\ \mathbf{A}^{\mathrm{ML}} & \mathbf{A}^{\mathrm{MM}}\end{bmatrix}\right\}^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{y}^{\mathrm{L}}\\ \mathbf{y}^{\mathrm{M}}\end{bmatrix} \qquad (14)$$

$$\mathbf{x}=(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{y}$$

$$\mathbf{x}=\mathbf{B}\mathbf{y}$$

$$\begin{bmatrix}\mathbf{x}^{\mathrm{L}}\\ \mathbf{x}^{\mathrm{M}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{B}^{\mathrm{LL}} & \mathbf{B}^{\mathrm{LM}}\\ \mathbf{B}^{\mathrm{ML}} & \mathbf{B}^{\mathrm{MM}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{y}^{\mathrm{L}}\\ \mathbf{y}^{\mathrm{M}}\end{bmatrix} \qquad (15)$$

em que $(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}=\mathbf{B}$ é a **matriz inversa de Leontief**.

Modelo inter-regional

- **Quais são as vantagens e desvantagens do modelo inter-regional de insumo-produto?**

$$\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{y}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{y}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}^{\mathrm{L}} \\ \mathbf{x}^{\mathrm{M}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{\mathrm{LL}} & \mathbf{B}^{\mathrm{LM}} \\ \mathbf{B}^{\mathrm{ML}} & \mathbf{B}^{\mathrm{MM}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}^{\mathrm{L}} \\ \mathbf{y}^{\mathrm{M}} \end{bmatrix}$$

- **Vantagem**: captura a magnitude de efeitos sobre cada setor em cada uma das regiões.
- **Desvantagem**: aumento da necessidade de dados e a hipótese necessária de relações de comércio constantes.

Modelo inter-regional

- Suponha um aumento na demanda por automóveis da FIAT produzidos em Minas Gerais (MG).
- **Efeito *spillover* inter-regional:**

Aumento da produção da FIAT em MG → Aumento da produção de componentes em SP

- **Efeito *spillover* inter-regional:**

Aumento da produção de componentes em SP → Aumento da produção de alumínio em MG

- **Efeito *feedback*:**

Aumento da produção da FIAT em MG → Aumento da produção de componentes em SP → Aumento da produção de alumínio em MG

- O modelo inter-regional permite isolar a magnitude destes efeitos!

Modelo inter-regional

- Para ver isso, podemos, a partir da equação (13), definir $\mathbf{Y^L}$ e $\mathbf{Y^M}$ da seguinte maneira:

$$\left(\mathbf{I} - \mathbf{A}^{\mathrm{LL}}\right)\mathbf{X}^{\mathrm{L}} - \mathbf{A}^{\mathrm{LM}}\mathbf{X}^{\mathrm{M}} = \mathbf{Y^L} \qquad (16)$$

$$-\mathbf{A}^{\mathrm{ML}}\mathbf{X^L} + \left(\mathbf{I} - \mathbf{A}^{\mathrm{MM}}\right)\mathbf{X}^{\mathrm{M}} = \mathbf{Y^M} \qquad (17)$$

- Suponha que $\mathbf{X}^{\mathrm{L}}$, $\mathbf{X}^{\mathrm{M}}$, $\mathbf{Y}^{\mathrm{L}}$ e $\mathbf{Y^M}$ represente $\Delta\mathbf{X}^{\mathrm{L}}$, $\Delta\mathbf{X}^{\mathrm{M}}$, $\Delta\mathbf{Y}^{\mathrm{L}}$ e $\Delta\mathbf{Y^M}$.
- Se temos $\Delta\mathbf{Y}^{\mathrm{L}}$ e $\Delta\mathbf{Y^M}$ (variações na demanda final nas duas regiões), podemos encontrar as variações na produção das duas regiões.
- Entretanto, se assumirmos $\Delta\mathbf{Y^M} = 0$, podemos calcular o impacto de variações na demanda final da região L ($\Delta\mathbf{Y}^{\mathrm{L}}$) sobre as duas regiões.

Modelo inter-regional

- Se $\mathbf{Y}^{\mathbf{M}} = 0$, temos:

$$-\mathbf{A}^{\mathrm{ML}}\mathbf{X}^{\mathbf{L}} + \left(\mathbf{I} - \mathbf{A}^{\mathrm{MM}}\right)\mathbf{X}^{\mathrm{M}} = 0 \tag{18}$$

- Rearranjando, temos:

$$\left(\mathbf{I} - \mathbf{A}^{\mathrm{MM}}\right)\mathbf{X}^{\mathrm{M}} = \mathbf{A}^{\mathrm{ML}}\mathbf{X}^{\mathbf{L}} \tag{19}$$

- Isolando $\mathbf{X}^{\mathrm{M}}$:

$$\mathbf{X}^{\mathrm{M}} = \left(\mathbf{I} - \mathbf{A}^{\mathrm{MM}}\right)^{-\mathbf{1}}\mathbf{A}^{\mathrm{ML}}\mathbf{X}^{\mathbf{L}} \tag{20}$$

- Substituindo (20) em (16):

$$\underbrace{\left(\mathbf{I} - \mathbf{A}^{\mathrm{LL}}\right)\mathbf{X}^{\mathrm{L}}}_{\text{Resultado do modelo para uma região}} - \underbrace{\mathbf{A}^{\mathrm{LM}}\left(\mathbf{I} - \mathbf{A}^{\mathrm{MM}}\right)^{-\mathbf{1}}\mathbf{A}^{\mathrm{ML}}\mathbf{X}^{\mathbf{L}}}_{\text{Demanda adicional devido as relações de comércio: \textit{feedback}}} = \mathbf{Y}^{\mathbf{L}} \tag{21}$$

Modelo inter-regional

- Os componentes da equação (21),

$$\left(\mathbf{I}-\mathbf{A}^{\mathrm{LL}}\right)\mathbf{X}^{\mathrm{L}}-\mathbf{A}^{\mathrm{LM}}\left(\mathbf{I}-\mathbf{A}^{\mathrm{MM}}\right)^{-\mathbf{1}}\mathbf{A}^{\mathrm{ML}}\mathbf{X}^{\mathbf{L}}=\mathbf{Y}^{\mathbf{L}}$$

podem ser interpretados como:

  - $\mathbf{A}^{\mathrm{ML}}\mathbf{X}^{\mathbf{L}}$ - captura a magnitude dos fluxos de M para L dado o aumento do produto em L;
  - $\left(\mathbf{I}-\mathbf{A}^{\mathrm{MM}}\right)^{-\mathbf{1}}\mathbf{A}^{\mathrm{ML}}\mathbf{X}^{\mathbf{L}}$ - traduz os fluxos em requisitos diretos e indiretos em M para produzir os insumos necessários;
  - $\mathbf{A}^{\mathrm{LM}}\left(\mathbf{I}-\mathbf{A}^{\mathrm{MM}}\right)^{-\mathbf{1}}\mathbf{A}^{\mathrm{ML}}\mathbf{X}^{\mathbf{L}}$ - indica a magnitude das vendas adicionais de L para M necessárias para a produção total em M.

Modelo inter-regional

- Portanto, resumidamente temos que:
  - O **modelo regional** considera:

$$\mathbf{X}^{\mathrm{L}} - \mathbf{A}^{\mathrm{LL}}\mathbf{X}^{\mathrm{L}} = \mathbf{Y}^{\mathbf{L}}$$

ou em **termos de produto**:

$$\mathbf{X}^{\mathrm{L}} = \left(\mathbf{I} - \mathbf{A}^{\mathrm{LL}}\right)^{-\mathbf{1}}\mathbf{Y}^{\mathbf{L}} \tag{22}$$

  - Enquanto o **modelo inter-regional** considera:

$$\mathbf{X}^{\mathrm{L}} - \mathbf{A}^{\mathrm{LL}}\mathbf{X}^{\mathrm{L}} - \mathbf{A}^{\mathrm{LM}}\left(\mathbf{I} - \mathbf{A}^{\mathrm{MM}}\right)^{-\mathbf{1}}\mathbf{A}^{\mathrm{ML}}\mathbf{X}^{\mathbf{L}} = \mathbf{Y}^{\mathbf{L}}$$

ou em **termos de produto**:

$$\mathbf{X}^{\mathrm{L}} = \left(\mathbf{I} - \mathbf{A}^{\mathrm{LL}} - \mathbf{A}^{\mathrm{LM}}\mathbf{B}^{\mathrm{MM}}\mathbf{A}^{\mathrm{ML}}\right)^{-\mathbf{1}}\mathbf{Y}^{\mathbf{L}} \tag{23}$$

Exemplo numérico*

Sistema inter-regional - setor x setor

Matriz IP		L 1	L 2	L 3	M 1	M 2	DF	DT
L	1	150	500	50	25	75	200	1000
L	2	200	100	400	200	100	1000	2000
L	3	300	500	50	60	40	50	1000
M	1	75	100	60	200	250	515	1200
M	2	50	25	25	150	100	450	800
VA		225	775	415	565	235		
PT		1000	2000	1000	1200	800		

Fonte: Miller e Blair (2009) – *Many-Region Models: The Interregional Approach*.
*Ver arquivo Excel.

Exemplo numérico

Sistema inter-regional - setor x setor

Matriz IP		L 1	L 2	L 3	M 1	M 2	DF	DT
L	1	150	$\boxed{500}$	50	25	75	200	1000
L	2	200	100	400	200	100	1000	2000
L	3	300	500	50	60	40	50	1000
M	1	75	100	60	200	250	515	1200
M	2	50	25	25	150	100	450	800
VA		225	775	415	565	235		
PT		1000	$\boxed{2000}$	1000	1200	800		

Matriz de coeficientes técnicos

A	L 1	L 2	L 3	M 1	M 2
1	0,150	$\boxed{0,250}$	0,050	0,021	0,094
2	0,200	0,050	0,400	0,167	0,125
3	0,300	0,250	0,050	0,050	0,050
1	0,075	0,050	0,060	0,167	0,313
2	0,050	0,013	0,025	0,125	0,125

Exemplo: $a_{ij}^{LL} = \frac{z_{ij}^{LL}}{x_j^{L}}$

$$a_{12}^{LL} = \frac{z_{12}^{LL}}{x_2^{L}} = \frac{500}{2000} = 0{,}250$$

Exemplo numérico

- A partir da matriz A, a podemos calcular a **matriz inversa de Leontief** $(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}$:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}^{\mathrm{LL}} & \mathbf{B}^{\mathrm{LM}} \\ \mathbf{B}^{\mathrm{ML}} & \mathbf{B}^{\mathrm{MM}} \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{\mathrm{LL}} & \mathbf{A}^{\mathrm{LM}} \\ \mathbf{A}^{\mathrm{ML}} & \mathbf{A}^{\mathrm{MM}} \end{bmatrix} \right\}^{-1}$$

Matriz inversa de Leontief

$(I-A)^{-1}$	L	L	L	M	M
	1	2	3	1	2
1	1,423	0,465	0,291	0,192	0,304
2	0,635	1,424	0,671	0,409	0,456
3	0,638	0,537	1,336	0,250	0,311
1	0,267	0,200	0,197	1,341	0,547
2	0,147	0,091	0,093	0,215	1,254

Exemplo numérico

- Se considerarmos apenas o $\mathbf{A}^{\mathrm{LL}}$, como no **modelo regional**, temos a seguinte **matriz inversa de Leontief** $\left(\mathbf{I}-\mathbf{A}^{\mathrm{LL}}\right)^{-1}$:

Matriz de coeficientes técnicos - região L

A^{LL}	L 1	L 2	L 3
1	0,150	0,250	0,050
2	0,200	0,050	0,400
3	0,300	0,250	0,050

Matriz inversa de Leontief - região L

$(I-A^{LL})^{-1}$	L 1	L 2	L 3
1	1,365	0,425	0,251
2	0,527	1,348	0,595
3	0,570	0,489	1,289

- Quão diferente são os resultados dos modelos (regional e inter-regional) dado variações na demanda final da região L?

Modelo regional versus inter-regional

Modelo regional $\Delta \mathbf{x}^{\mathbf{L}} = \left(\mathbf{I} - \mathbf{A}^{\mathbf{LL}}\right)^{-1} \Delta \mathbf{y}^{\mathbf{L}}$

Y^L

1	100
2	0
3	0

X^L

1	136,51
2	52,73
3	56,98

$$\sum_{i=1}^{3} x_{\mathrm{i}}^{\mathrm{L}} = 246,23$$

Erro

8,68%

Modelo inter-regional $\Delta \mathbf{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \Delta \mathbf{y}$

Y

1	100
2	0
3	0
1	0
2	0

X

1	142,34
2	63,46
3	63,83
1	26,72
2	14,68

$$\sum_{i=1}^{3} x_{\mathrm{i}}^{\mathrm{L}} = 269,63$$

O modelo regional **subestima** o produto total da região L. O erro é de 8,68% do valor verdadeiro (modelo inter-regional).

Decomposição regional do multiplicador

- O **multiplicador total de produção** no modelo inter-regional é dado por:
  - Região L:

$$O_j^{L} = O_j^{LL} + O_j^{ML} \tag{24}$$

$$O_j^{L} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} b_{ij}^{LL}}_{\text{Efeito intra-regional}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} b_{ij}^{ML}}_{\text{Efeito inter-regional}} \tag{25}$$

  - Região M:

$$O_j^{M} = O_j^{MM} + O_j^{LM} \tag{26}$$

$$O_j^{M} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} b_{ij}^{MM}}_{\text{Efeito intra-regional}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} b_{ij}^{LM}}_{\text{Efeito inter-regional}} \tag{27}$$

NEDUR

Exemplo numérico

Matriz inversa de Leontief

$(I-A)^{-1}$	L 1	L 2	L 3	M 1	M 2
1	1,423	0,465	0,291	0,192	0,304
2	0,635	1,424	0,671	0,409	0,456
3	0,638	0,537	1,336	0,250	0,311
1	0,267	0,200	0,197	1,341	0,547
2	0,147	0,091	0,093	0,215	1,254
Total	3,110	2,717	2,588	2,407	2,872

Efeito intra-regional

Efeito inter-regional

Multiplicadores de produção

Exemplo: Multiplicador de produção da Região L (setor 1):

$$O_1^{\mathrm{L}} = O_1^{\mathrm{LL}} + O_1^{\mathrm{ML}}$$

$$O_1^{\mathrm{L}} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} b_{i1}^{\mathrm{LL}}}_{\text{Efeito intra-regional}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} b_{i1}^{\mathrm{ML}}}_{\text{Efeito inter-regional}}$$

$$O_1^{\mathrm{LL}} = \sum_{i=1}^{n} b_{i1}^{\mathrm{LL}} = 1{,}423 + 0{,}635 + 0{,}638 = 2{,}696$$

$$O_1^{\mathrm{ML}} = \sum_{i=1}^{n} b_{i1}^{\mathrm{ML}} = 0{,}267 + 0{,}147 = 0{,}414$$

$$O_1^{\mathrm{L}} = 2{,}696 + 0{,}414 = 3{,}110$$

Decomposição regional do multiplicador

- **Multiplicador total de produção** (região L):

$$O_{\mathrm{j}}^{\mathrm{L}} = O_{\mathrm{j}}^{\mathrm{LL}} + O_{\mathrm{j}}^{\mathrm{ML}}$$

- **Decomposição simples:**

$$\frac{O_{\mathrm{j}}^{\mathrm{L}}}{O_{\mathrm{j}}^{\mathrm{L}}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} b_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{LL}}}{O_{\mathrm{j}}^{\mathrm{L}}} + \frac{\sum_{i=1}^{n} b_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{ML}}}{O_{\mathrm{j}}^{\mathrm{L}}} \quad \Rightarrow \quad 1 = o_{\mathrm{j}}^{\mathrm{LL}} + o_{\mathrm{j}}^{\mathrm{ML}} \tag{28}$$

- **Decomposição líquida:**

$$\frac{O_{\mathrm{j}}^{\mathrm{L}} - 1}{O_{\mathrm{j}}^{\mathrm{L}} - 1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} b_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{LL}} - 1}{O_{\mathrm{j}}^{\mathrm{L}} - 1} + \frac{\sum_{i=1}^{n} b_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{ML}}}{O_{\mathrm{j}}^{\mathrm{L}} - 1} \quad \Rightarrow \quad 1 = ol_{\mathrm{j}}^{\mathrm{LL}} + ol_{\mathrm{j}}^{\mathrm{ML}} \tag{29}$$

- Similarmente, podemos decompor o multiplicador para região M.

Exemplo numérico

Exemplo: Multiplicador da Região L (setor 1):

Multiplicadores totais

Região L	1	2	3
Intra-regional	2,696	2,426	2,298
Inter-regional	0,414	0,291	0,290
Total	3,110	2,717	2,588

Decomposição simples

Região L	1	2	3
Intra-regional	86,7%	89,3%	88,8%
Inter-regional	13,3%	10,7%	11,2%
Total	100%	100%	100%

Decomposição líquida

Região L	1	2	3
Intra-regional	80,4%	83,1%	81,7%
Inter-regional	19,6%	16,9%	18,3%
Total	100%	100%	100%

Decomposição simples

$$\frac{O_1^{\mathrm{L}}}{O_1^{\mathrm{L}}} = \frac{O_1^{\mathrm{LL}}}{O_1^{\mathrm{L}}} + \frac{O_1^{\mathrm{ML}}}{O_1^{\mathrm{L}}} \qquad 1 = o_1^{\mathrm{LL}} + o_1^{\mathrm{ML}}$$

$$\frac{3{,}110}{3{,}110} = \frac{2{,}696}{3{,}110} + \frac{0{,}414}{3{,}110}$$

$$1 = 0{,}867 + 0{,}133$$

Decomposição líquida

$$\frac{O_1^{\mathrm{L}} - 1}{O_1^{\mathrm{L}} - 1} = \frac{O_1^{\mathrm{LL}} - 1}{O_1^{\mathrm{L}} - 1} + \frac{O_1^{\mathrm{ML}}}{O_1^{\mathrm{L}} - 1}$$

$$1 = ol_1^{\mathrm{LL}} + ol_1^{\mathrm{ML}}$$

$$\frac{3{,}110 - 1}{3{,}110 - 1} = \frac{2{,}696 - 1}{3{,}110 - 1} + \frac{0{,}414}{3{,}110 - 1}$$

$$1 = 0{,}804 + 0{,}196$$

Exemplo numérico

Multiplicadores totais

Região L	1	2	3
Intra-regional	2,696	2,426	2,298
Inter-regional	0,414	0,291	0,290
Total	3,110	2,717	2,588

Multiplicadores totais

Região M	1	2
Intra-regional	1,556	1,801
Inter-regional	0,851	1,071
Total	2,407	2,872

Decomposição simples

Região L	1	2	3
Intra-regional	86,7%	89,3%	88,8%
Inter-regional	13,3%	10,7%	11,2%
Total	100%	100%	100%

Decomposição simples

Região M	1	2
Intra-regional	64,6%	62,7%
Inter-regional	35,4%	37,3%
Total	100%	100%

Decomposição líquida

Região L	1	2	3
Intra-regional	80,4%	83,1%	81,7%
Inter-regional	19,6%	16,9%	18,3%
Total	100%	100%	100%

Decomposição líquida

Região M	1	2
Intra-regional	39,5%	42,8%
Inter-regional	60,5%	57,2%
Total	100%	100%

Índices de ligação

- Por que determinados setores têm impacto acima da média sobre outros setores?

- Rasmussen (1952) e Hirschman (1958) utilizam dois índices para mostrar tais diferenças:

  - *Linkages* para trás (poder de dispersão) – $\mathbf{U_j}$: determina o quanto um setor demanda dos demais setores da economia.

  - *Linkages* para frente (sensibilidade da dispersão) – $\mathbf{U_i}$: determina o quanto este setor é demandado pelos demais setores da economia.

Índices de ligação

- A base de cálculo dos índices é feita com informações da matriz inversa de Leontief (**B**):
  - b_{ij} – elementos da matriz inversa de Leontief;
  - $b_{.\mathrm{j}} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{n} b_{\mathrm{ij}}$ – soma dos elementos de **B** nas colunas;
  - $b_{\mathrm{i}.} = \sum_{\mathrm{j}=1}^{n} b_{\mathrm{ij}}$ – soma dos elementos de **B** nas linhas;
  - $b_{..} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{n} \sum_{\mathrm{j}=1}^{n} b_{\mathrm{ij}}$ – soma de todos os elementos de **B**;
  - n – número de setores;
  - ${}^{b_{.\mathrm{j}}}/_{n}$ – valor médio dos elementos na coluna *j*;
  - ${}^{b_{\mathrm{i}.}}/_{n}$ – valor médio dos elementos na linha *i*;
  - $B^{*} = {}^{b_{..}}/_{n^2}$ - média dos elementos da matriz inversa de Leontief (**B**).

Índices de ligação

- Os índices são dados por:
  - **Índice de ligação para trás:**

$$U_{\mathrm{j}} = \frac{b_{.\mathrm{j}}/n}{B^{*}}$$

Se $U_j > 1$ – indica que uma mudança unitária na demanda final do setor *j* cria um aumento acima da média na economia, ou seja, o setor *j* gera uma resposta dos outros setores acima da média.

  - **Índice de ligação para frente:**

$$U_{\mathrm{i}} = \frac{b_{\mathrm{i}.}/n}{B^{*}}$$

Se $U_i > 1$ – indica que uma mudança unitária na demanda final de todos os setores cria um aumento acima da média no setor *i*. O setor *i* tem uma dependência acima da média da produção dos outros setores.

Índices de ligação

- Se

$$U_{\mathrm{j}} = \frac{b_{.\mathrm{j}}/n}{B^*} > 1 \quad \text{e} \quad U_{\mathrm{i}} = \frac{b_{\mathrm{i}.}/n}{B^*} > 1$$

então o setor é considerado um **setor-chave** na economia!

- **Setores-chave**: setores que contribuem acima da média para o crescimento da economia.

Índices de ligação

Matriz inversa de Leontief

$(I-A)^{-1}$	L 1	L 2	L 3	M 1	M 2
1	1,423	0,465	0,291	0,192	0,304
2	0,635	1,424	0,671	0,409	0,456
3	0,638	0,537	1,336	0,250	0,311
1	0,267	0,200	0,197	1,341	0,547
2	0,147	0,091	0,093	0,215	1,254

Bi.	Bi./n
2,675	0,535
3,594	0,719
3,072	0,614
2,552	0,510
1,799	0,360

B.j	3,110	2,717	2,588	2,407	2,872
B.j/n	0,622	0,543	0,518	0,481	0,574

n^2	25
B..	13,694
B*	0,548

Índices de ligação

Multiplicador				Índice de ligação		Setor-Chave
P/Frente	Média	P/Trás	Média	P/Frente	P/Trás	
Bi.	Bi./n	B.j	B.j/n	Ui	Uj	
2,675	0,535	3,110	0,622	0,977	1,136	Não
3,594	0,719	2,717	0,543	1,312	0,992	Não
3,072	0,614	2,588	0,518	1,122	0,945	Não
2,552	0,510	2,407	0,481	0,932	0,879	Não
1,799	0,360	2,872	0,574	0,657	1,049	Não

B*	0,548

Lembre-se:

- **Índice de ligação para frente:** $U_{\mathrm{i}} = \dfrac{b_{\mathrm{i.}}/n}{B^*}$
- **Índice de ligação para trás:** $U_{\mathrm{j}} = \dfrac{b_{\mathrm{.j}}/n}{B^*}$

Referências

Básica:

- MILLER, R. E.; BLAIR, P. D. **Input-Output Analysis**: Foundations and Extensions. Prentice-Hall, 2009.
- GUILHOTO, J. J. M. **Análise de Insumo-produto:** teoria e fundamentos. 2011. (MPRA Paper No. 32566)

Complementar:

- HADDAD, E. **Modelos Aplicados de Equilíbrio Geral** – EAE 5918. Núcleo de Economia Regional e Urbana da Universidade de São Paulo, 2019.
- HADDAD, E.; VALE, V. A. **Curso de Métodos de Análise Regional e Inter-regional.** Núcleo de Economia Regional e Urbana da Universidade de São Paulo. Programa de Extensão Nereides, 2017.

Contato

- Professores:

Prof. Alexandre Alves Porsse:
porsse@gmail.com

Prof. Vinícius de Almeida Vale:
vinicius.a.vale@gmail.com

NEDUR

Núcleo de Estudos em Desenvolvimento Urbano e Regional

Universidade Federal do Paraná

Av. Prefeito Lothário Meissner, nº 632 – Setor de Ciências Sociais | UFPR
www.nedur.ufpr.br
nedur.ufpr@gmail.com